Mathématiques - Devoir Surveillé 1 - Correction
Vendredi 15 février 2018 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 On considère la fonction

$$\begin{array}{rcccc} f & : &]2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$$

1. Montrer que f est une bijection de E_1 sur F_1, avec E_1 et F_1 deux ensembles à déterminer.
   On étudie les variations de f :

$$f'(x) = \frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

   La dérivée est négative sur l'ensemble de définition.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ donc :

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	1

   Donc f est bijective de $E_1 =]2,+\infty[$ dans $F_1 =]1,+\infty[$.

2. Soit

$$f^{-1} \;:\; E_2 \to F_2$$

   (a) Expliquer pourquoi f admet une application réciproque f^{-1}.
   La fonction f est bijective, de E_1 dans F_1. Alle admet donc une réciproque.

   (b) Déterminer les ensembles de départ E_2 et d'arrivée et F_2 de f^{-1}.
   La réciproque de f est définie sur l'ensemble image de f donc $E_2 = F_1 =]1,+\infty[$ et son ensemble image est l'ensemble de définition de f donc $F_2 = E_1 =]2,+\infty[$.

   (c) Déterminer l'application réciproque de f.

On résout, en fonction de $y \in]1, +\infty[$:

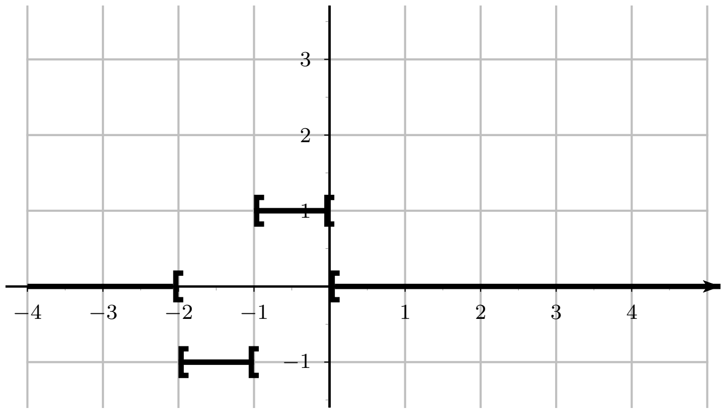
$$\begin{aligned}
f(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-2} = y \\
&\Leftrightarrow \quad x+1 = y(x-2) \\
&\Leftrightarrow \quad x+1 = yx - 2y \\
&\Leftrightarrow \quad x - yx = -2y - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x(1-y) = -2y - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{-2y-1}{1-y}
\end{aligned}$$

Donc la réciproque de f est : $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{1-x} = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

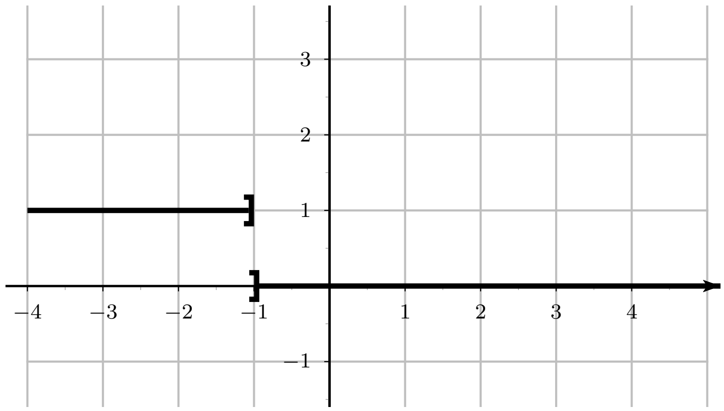
3. Déterminer g tel que $g \circ f(x) = \ln(x)$.
   On sait que $f^{-1} \circ f(x) = x$ donc $\ln \circ f^{-1} \circ f(x) = \ln(x)$.
   La fonction $g(x) = \ln\left(f^{-1}(x)\right) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$ répond donc à la question.

Exercice 2

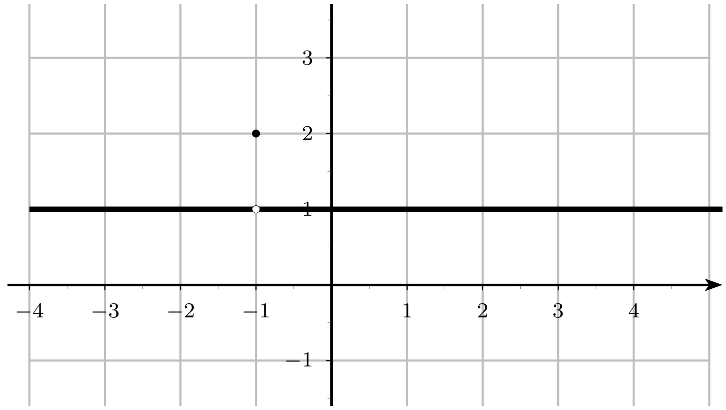
1. Représenter les fonctions suivantes :
   (a) $f_1(t) = 2\mathcal{U}(t+1) - \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t+2) = -\mathcal{U}(t+2) + 2\mathcal{U}(t+1) - \mathcal{U}(t)$



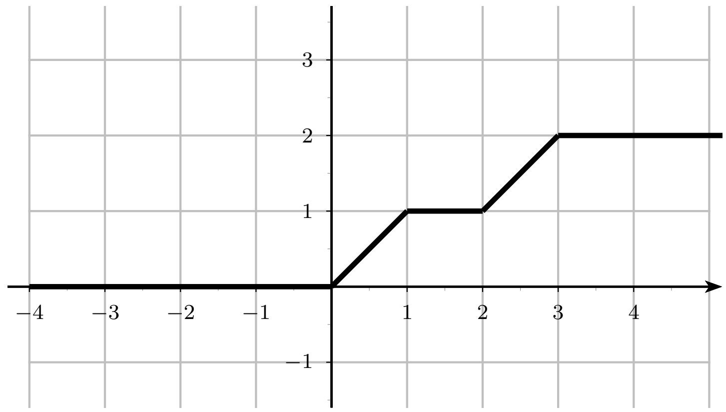
   (b) $f_2(t) = \mathcal{U}(-1-t) + \mathcal{U}(t+1)$.
   La fonction $t \mapsto \mathcal{U}(-1-t)$ vaut 1 si et seulement si $-1-t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -1$. Donc son graphe est



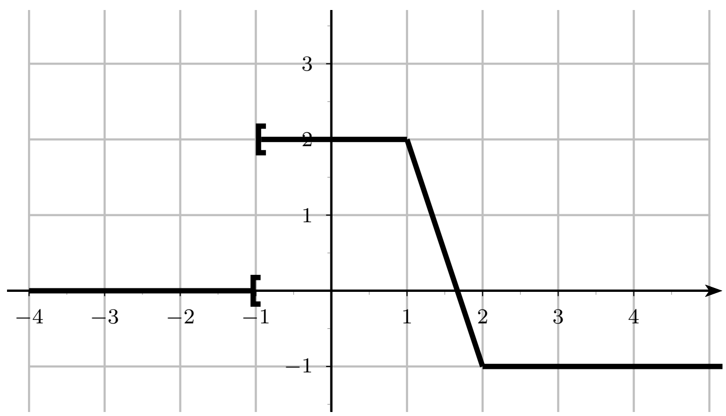
   Donc le graphe de la fonction f_2 est



(c) $f_3(t) = t\mathcal{U}(t) - (t-1)\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\mathcal{U}(t-2) - (t-3)\mathcal{U}(t-3)$



2. Déterminer l'écriture de la fonction suivante à l'aide de fonctions échelons :



Par lecture graphique on obtient :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ 2 & \text{si } t \in [-1;1[\\ -3t+5 & \text{si } t \in [1;2[\\ -1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

Donc

$$f(t) = 2\mathcal{U}(t+1) + (-3t+3)\mathcal{U}(t-1) + (3t-6)\mathcal{U}(t-2)$$

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendants :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles l'inverse l'une de l'autre ?
   Calculons le produit de A par B :
   $$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$
   Le produit n'est pas égal à l'identité. Donc les matrices ne sont pas l'inverse l'une de l'autre.

2. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice D telle que $C \times D$ et $C + D$ existent ?
   Pour que la somme $C+D$ existe il faut que D ait les mêmes dimensions que C donc : $D \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
   Or, on ne peut pas multiplier une matrice de taille 2×3 par une autre matrice de taille $2x3$.
   Donc, non une telle matrice n'existe pas.

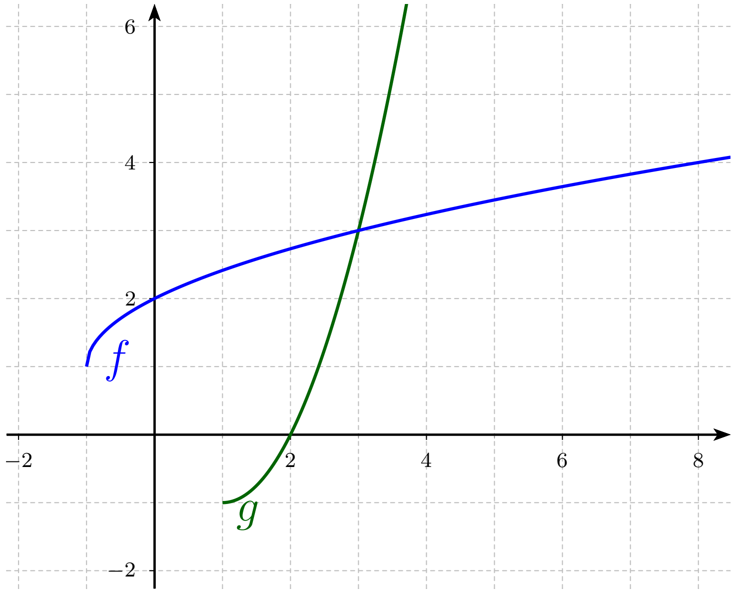
3. Soit la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer a, b et c pour que $F = \begin{pmatrix} a & -2 & 5 \\ -3 & b & 2 \\ 4 & c & -2 \end{pmatrix}$ soit l'inverse de E.
   Il faut que les produits $E \times F$ et $F \times E$ soient égaux à l'identité.
   Le coefficient ligne 2, colonne 1 de $E \times F$ vaut : $2a + 20$. Or il doit être nul. Donc $a = -10$.
   Le coefficient ligne 2, colonne 1 de $F \times E$ vaut : $2b + 2$. Or il doit être nul. Donc $b = -1$.
   Le coefficient ligne 3, colonne 1 de $F \times E$ vaut : $2c - 2$. Or il doit être nul. Donc $c = 1$.
   La matrice inverse de E est donc :
   $$F = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \quad y + z = 1 \\ \quad 2x + 5z = 1 \\ x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$
   Le système linéaire peut s'écrire sous forme matriciel : $E \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.
   Pour le résoudre il suffit donc de calculer
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = F \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$
   La solution du système est $(18, 8, -7)$.

Exercice 4

1. Soit f et g les fonctions représentées sur le graphique ci-dessous.



Calculer $f \circ g(1)$, $f \circ g(2)$ et $f \circ g(3)$. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?
Graphiquement on peut lire $g(1) = -1$. Donc $f \circ g(1) = f(-1) = 1$.
De même : $g(2) = 0$ donc $f \circ g(2) = f(0) = 2$; et $g(3) = 3$ donc $f \circ g(3) = f(3) = 3$;

On remarque que pour ces 3 valeurs on a $f \circ g(x) = x$. Ceci était prévisible car on observe que les courbes de f et g sont la symétrie l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$; on a donc $f^{-1} = g$ et donc, pour tout $x \in D_g$: $f \circ g(x) = x$.

2. On considère les fonctions

$$f(t) = t^2 - 2t + 1\ ;\ g(t) = \sqrt{t} + 1\ ;\ h(t) = \ln(t)$$

(a) Soit $t > 0$. Que vaut $f \circ g(t)$? On a

$$f \circ g(t) = (g(t))^2 - 2g(t) + 1 = (\sqrt{t}+1)^2 - 2(\sqrt{t}+1) + 1 = (\sqrt{t})^2 + 2\sqrt{t} + 1 - 2\sqrt{t} - 2 + 1 = (\sqrt{t})^2$$

Or $t > 0$, donc $f \circ g(t) = t$.

(b) Soit $t > 0$. Que vaut $g \circ f \circ h(t)$?
On déduit de la question précédent que g est la réciproque de f. Donc $g \circ f(t) = t$.
Donc, pour tout $t > 0$ on a

$$g \circ f \circ h(t) = h(t) = \ln(t)$$

Exercice 5 Calculer :

1. $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \text{car } \frac{\pi}{3} \in [0;\pi]$$

2. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. On a

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Or $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

3. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. On a

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi-\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Donc

$$\arcsin\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$$

4. $\arccos\left(\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right)$. On a

$$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) = \cos\left(2\pi-\frac{7\pi}{10}\right) = \cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)$$

Donc

$$\arccos\left(\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right) = \frac{7\pi}{10}$$

5. $\arctan\left(\tan\left(\frac{28\pi}{3}\right)\right)$. On a

$$\tan\left(\frac{28\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{27\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(9\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{car} \quad \tan \text{ est } \pi\text{périodique}$$

Donc

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{28\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

6. $\tan\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right)$. On a

$$\tan\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right) = \sqrt{3}$$

car $\arctan(\tan(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.