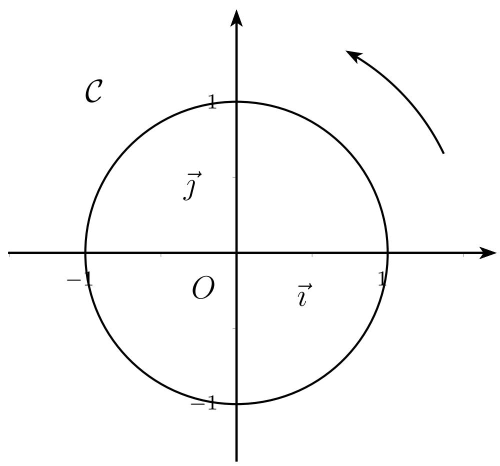
3 Trigonométrie

Pour tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3.1 Le cercle trigonométrique

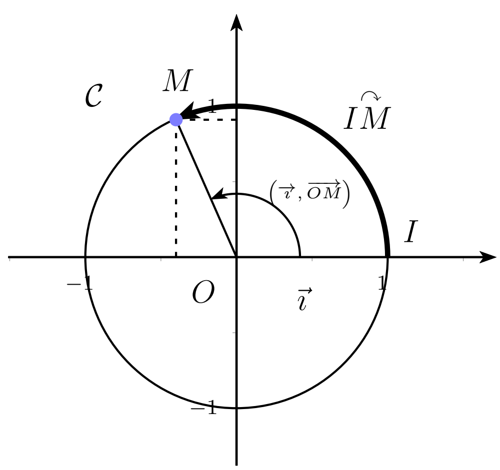
Définition 1 (Cercle trigonométrique)**.**
On appelle cercle trigonométrique *le cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le « sens direct » (sens contraire des aiguilles d'une montre) dit aussi « sens trigonométrique ».*



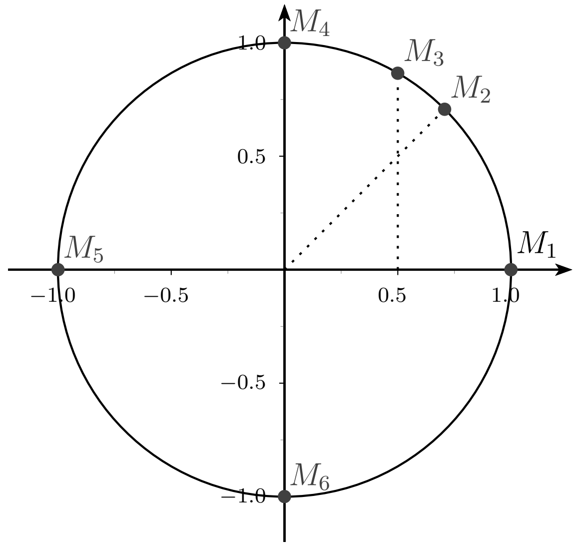
Définition 2 (Arc et angle orienté, radian)**.**
Soit M un point du cercle trigonométrique et soit I le point de coordonnées $(1, 0)$*. On note :*

- $\overset{\frown}{IM}$ *l'*arc de cercle orienté *allant de I à M sur le cercle dans le sens trigonométrique,*
- $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ *l'*angle orienté *entre les vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{OM}$.*

Et on appelle mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ en radians*, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$.*



Exemple 3.
Sachant que le cercle trigonométrique est de rayon 1, son périmètre vaut 2π et on peut donc aisément déterminer les angles orientés définis par les points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 et M_6 :



On obtient :

- $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_1}\right) = 0$
- $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$
- $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
- $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_5}\right) = \pi$
- $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$

Définition 4 (Égalité modulo 2π)**.**
Soient θ_1 et θ_2 deux angles orientés et soient M_1 et M_2 deux points du cercle trigonométrique tels que $\theta_1 = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_1}\right)$ et $\theta_2 = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_2}\right)$. On a alors

$$M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont confondus} \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta_1 = \theta_2 + k \times 2\pi$$

On dit alors que θ_1 et θ_2 sont égaux modulo 2π *et on note $\theta_1 = \theta_2\ [2\pi]$.*

Exemple 5.

- $5\pi = \pi + 4\pi$ *donc* $5\pi = \pi\ [2\pi]$
- $\dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi$ *donc* $\dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- $\dfrac{19\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 6\pi$ *donc* $\dfrac{19\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Définition 6 (Mesure principale)**.**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un angle. On appelle mesure principale *de θ, la valeur θ' telle que*

$$\theta = \theta'\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \theta' \in]-\pi;\pi]$$

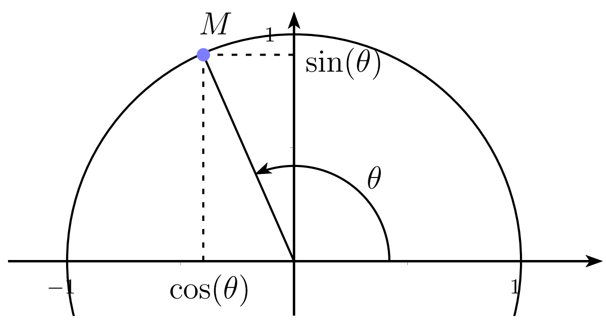
Exemple 7.

- ▷ π *est la mesure principale de* 5π
- ▷ $-\frac{\pi}{2}$ *est la mesure principale de* $\frac{3\pi}{2}$
- ▷ $\frac{\pi}{3}$ *est la mesure principale de* $\frac{19\pi}{3}$

3.2 Les fonctions trigonométriques

Définition 8 (Cosinus, sinus et tangente).
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ *un angle et soit* M *le point du cercle trigonométrique tel que* $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta$. *On appelle :*

- ▷ cosinus *de* θ, *la valeur notée* $\cos(\theta)$ *égale à l'abscisse de* M
- ▷ sinus *de* θ, *la valeur notée* $\sin(\theta)$ *égale à l'ordonnée de* M
- ▷ tangente *de* θ, *la valeur notée* $\tan(\theta)$ *égale à* $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, *lorsque cette valeur existe.*

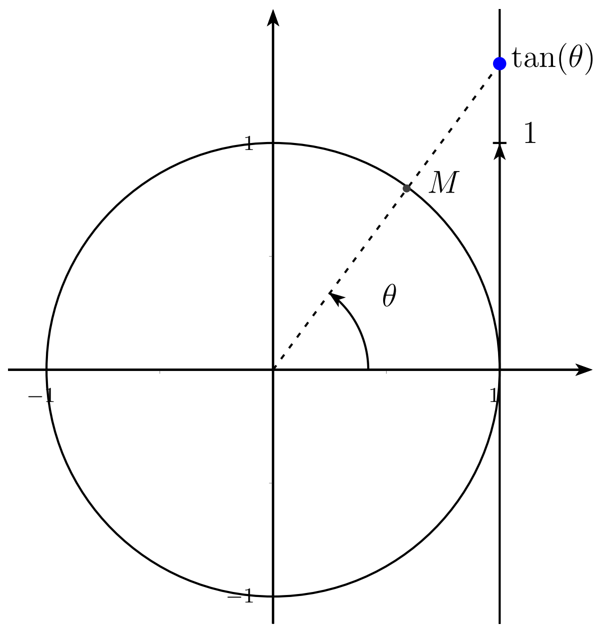


Proposition 9. *On peut aisément calculer les valeurs suivantes de cosinus, sinus et tangente.*

θ	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\theta)$	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\theta)$	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(\theta)$	*0*	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	*1*	$\sqrt{3}$	∞	0

La proposition suivante, qui se démontre à l'aide du théorème de Thales, rend possible la lecture des valeurs de tangente sur le cercle trigonométrique.

Proposition 10.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un angle et soit M le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta$. On note T le point d'intersection entre (OM) et la tangente au cercle en I.
La valeur de $\tan(\theta)$ est égale à l'ordonnée de T.



Les valeurs de tangente se lisent donc sur une des tangentes au cercle... d'où le nom de la fonction !

Remarque. *Pour un angle $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, les définitions précédentes sont cohérentes avec celles vues au collège. Pour rappel : dans un triangle ABC rectangle en A :*

$$\cos\left(\hat{B}\right) = \frac{\textit{adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}, \quad \sin\left(\hat{B}\right) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}, \quad \tan\left(\hat{B}\right) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$

3.3 Formulaire

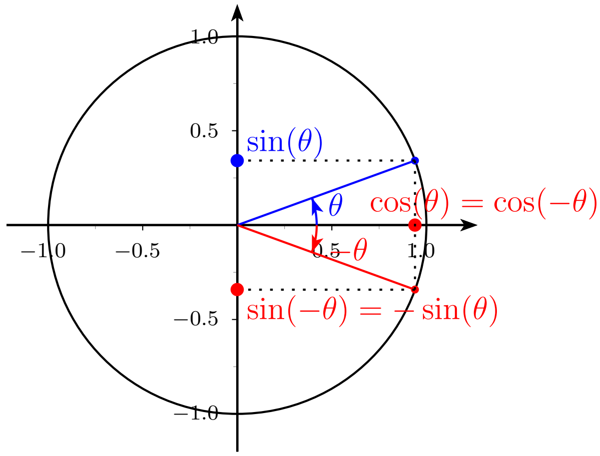
La proposition suivante donne des formules qui sont des conséquences immédiates de la définition.

Proposition 11 (Formules à retrouver sur le cercle)**.** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un angle.*

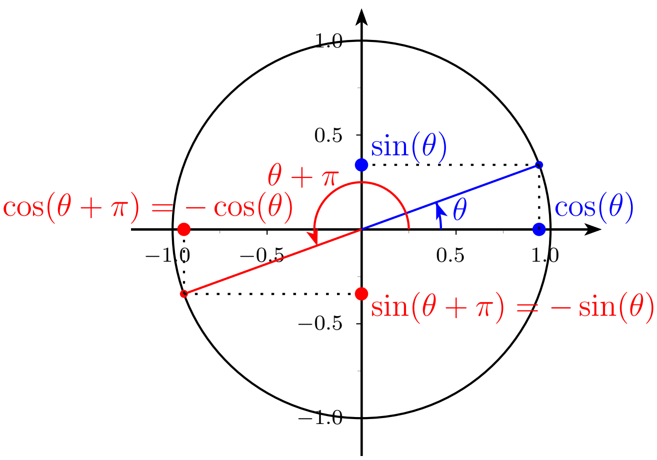
1. $\cos(\theta) \in [-1; 1]$ *et* $\sin(\theta) \in [-1; 1]$.

2. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:* $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$ *et* $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$.

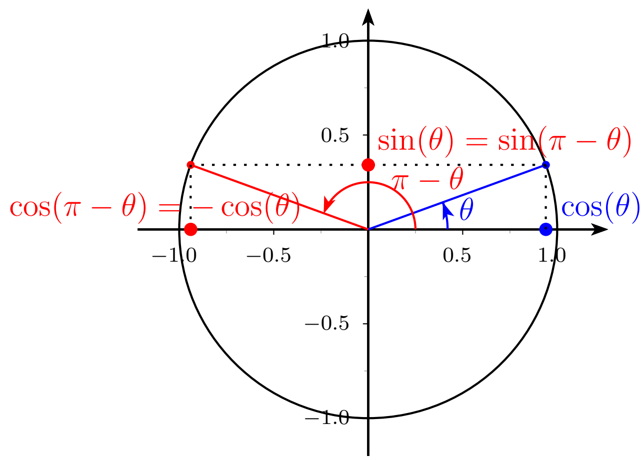
3. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ *et* $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.



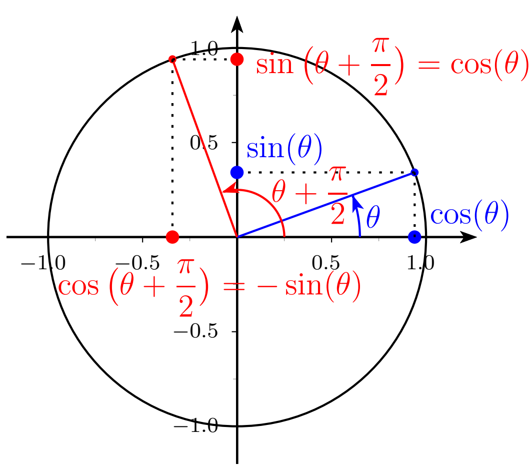
4. $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$ *et* $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$.



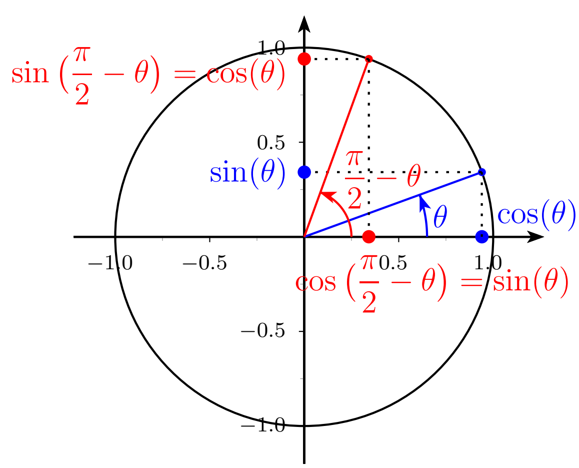
5. $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ *et* $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$.



6. $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$ *et* $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$



7. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$.



On retient généralement moins de formule à propos de la fonction tangente. Si besoin on peut les retrouver aisément grâce aux formules des fonctions cos et sin et en revenant à la définition de tan. On peut néanmoins noter les résultats suivants qui sont naturels.

Proposition 12. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un angle.*

1. $\tan(\theta)$ *n'est pas défini si* $\theta = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
2. $\tan(\theta)$ *n'est pas borné.*
3. *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$: $\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta)$.
4. $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$.

La proposition suivante est un formulaire non exhaustif (qu'il faut savoir retrouver).

Proposition 13. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux angles.*

1. $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ *(preuve par Pythagore).*
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
3. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
4. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
5. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
6. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
7. $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$
8. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
9. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
10. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

La proposition suivante sera très utile pour étudier les signaux trigonométriques.

Proposition 14.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit $\omega \in \mathbb{R}^+$. On considère le signal f défini par

$$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

Il existe un unique $A \in \mathbb{R}^+$ et un unique $\varphi \in]-\pi;\pi]$ tels que

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Démonstration.
On pose $A = \sqrt{a^2+b^2}$. On suppose $A \neq 0$ (si $A = 0$ alors $a = b = 0$ et $f = 0$, ce n'est pas vraiment intéressant !) On a alors :

$$f(t) = A \times \left(\frac{a}{A}\cos(\omega t) + \frac{b}{A}\sin(\omega t)\right)$$

D'autre part,

$$\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{b}{A}\right)^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{A^2}\right) = 1$$

Donc le point de coordonnées $\left(\frac{b}{A}, \frac{a}{A}\right)$ est un point du cercle trigonométrique ; il existe donc un unique angle φ entre $-\pi$ et π tel que

$$\cos(\varphi) = \frac{b}{A} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{a}{A}$$

Donc

$$f(t) = A \times (\sin(\varphi)\cos(\omega t) + \cos(\varphi)\sin(\omega t)) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Exemple 15.
Soit $f(t) = 2\cos(3t) - 2\sin(3t)$. Mettre f sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$.

On pose $A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$. On cherche $\varphi \in]-\pi,\pi]$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\varphi) &= \frac{b}{A} &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi) &= \frac{a}{A} &= \frac{2}{2\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Donc $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ et

$$f(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(3t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Méthode

▷ Mettre $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\sin(\omega t+\varphi)$ (ou $A\sin(\omega t-\varphi)$)

1. On pose $A=\sqrt{a^2+b^2}$
2. On cherche $\varphi\in]-\pi,\pi]$ tel que :

$$\begin{cases}\cos(\varphi) &= \dfrac{b}{A}\\[2ex] \sin(\varphi) &= \dfrac{a}{A}\end{cases}$$

▷ Mettre $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\cos(\omega t-\varphi)$ (ou $A\cos(\omega t+\varphi)$)

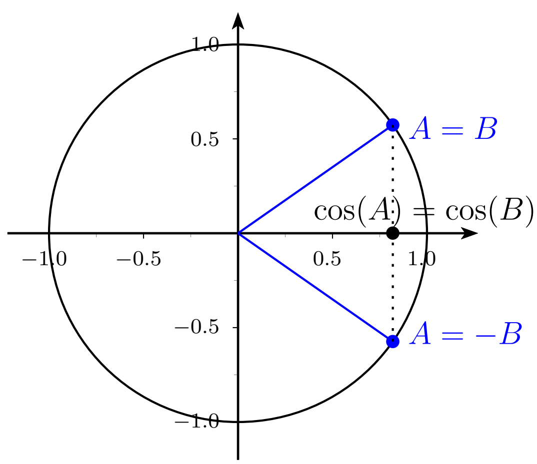
1. On met $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\sin(\omega t+\varphi)$
2. On sait que $\sin(\theta)=\cos(\theta-\dfrac{\pi}{2})$
3. On en déduit $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)=A\sin(\omega t+\varphi)=A\cos(\omega t+\varphi-\dfrac{\pi}{2})$

3.4 Équations trigonométriques

3.4.1 Équations du type : $\cos(A)=\cos(B)$

Proposition 16.
Soient $A\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{R}$ deux angles. On a :

$$\cos(A)=\cos(B)\Leftrightarrow A=B\ [2\pi]\quad ou\quad A=-B\ [2\pi]$$



Exemple 17.
Résoudre l'équation $\cos(2x)=\cos(3x)$.

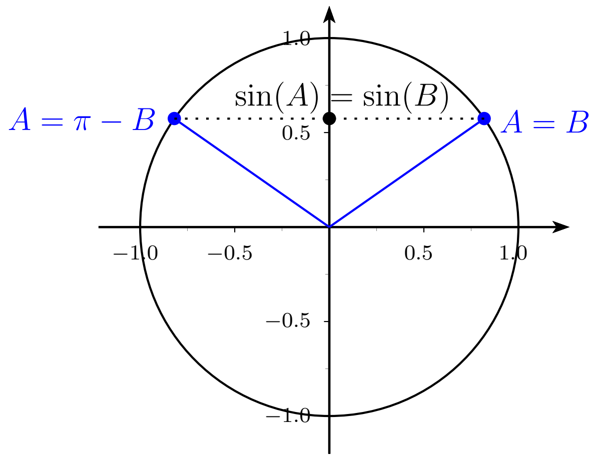
$$\begin{aligned}\cos(2x)=\cos(3x) &\Leftrightarrow 2x=3x\ [2\pi]\quad ou\quad 2x=-3x\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow x=0\ [2\pi]\quad ou\quad 5x=0\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow x=0\ [2\pi]\quad ou\quad x=0\ \left[\frac{2\pi}{5}\right]\end{aligned}$$

Les solutions sont donc tous les réels qui sont égaux à 0 modulo 2π ou égaux à 0 modulo $\dfrac{2\pi}{5}$.

3.4.2 Équations du type : $\sin(A) = \sin(B)$

Proposition 18.
Soient $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ deux angles. On a :

$$\sin(A) = \sin(B) \Leftrightarrow A = B\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad A = \pi - B\ [2\pi]$$



Exemple 19.
Résoudre l'équation $\sin(2x) = \sin(3x)$.

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \sin(3x) &\Leftrightarrow 2x = 3x\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x = \pi - 3x\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow x = 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 5x = \pi\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow x = 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{5}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right]\end{aligned}$$

Les solutions sont donc tous les réels qui sont égaux à 0 *modulo* 2π *ou égaux à* $\frac{\pi}{5}$ *modulo* $\frac{2\pi}{5}$.

3.4.3 Équations du type : $\cos(A) = \sin(B)$

Méthode
On se ramène à une équation du type $\sin(A) = \sin(B)$ en utilisant la formule :

$$\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Exemple 20.
Résoudre l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.
Comme $\cos(3x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$, *résoudre l'équation* $\cos(3x) = \sin(2x)$ *revient à résoudre l'équation* $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2x)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2x) &\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{2} = 2x\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x + \frac{\pi}{2} = \pi - 2x\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 5x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{10}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right]\end{aligned}$$

Les solutions sont donc tous les réels qui sont égaux à $-\frac{\pi}{2}$ *modulo* 2π *ou égaux à* $\frac{\pi}{10}$ *modulo* $\frac{2\pi}{5}$.

3.4.4 Équations du type : $a\cos(x) + b\sin(x) = c$

Méthode

1. Mettre $a\cos(x) + b\sin(x)$ sous la forme $A\sin(x + \varphi)$
2. Trouver $\psi \in]-\pi, \pi]$ tel que $\sin(\psi) = \dfrac{c}{A}$
3. Résoudre l'équation $\sin(x + \varphi) = \sin(\psi)$

Exemple 21.
Résoudre $\cos(3x) - \sin(3x) = 1$.
On pose $A = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. *On cherche* $\varphi \in]-\pi, \pi]$ *tel que :*

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \\ \sin(\varphi) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donc $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ *et* $\cos(3x) - sin(3x) = \sqrt{2}\sin\left(3x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$
Résoudre $\cos(3x) - \sin(3x) = 1$ *revient donc à résoudre :*

$$\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche alors $\psi \in]-\pi, \pi]$ *tel que* $\sin(\psi) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\psi = \dfrac{3\pi}{4}$ *convient. Il suffit donc de résoudre :*

$$\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) & \Leftrightarrow & 3x + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \quad ou \quad 3x + \frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \\ & \Leftrightarrow & 3x = 0\ [2\pi] \quad ou \quad 3x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ & \Leftrightarrow & x = 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{6}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

Les solutions sont donc tous les réels qui sont égaux à 0 *modulo* $\dfrac{2\pi}{3}$ *ou égaux à* $-\dfrac{\pi}{6}$ *modulo* $\dfrac{2\pi}{3}$.