5 Fonctions périodiques et opérations sur les fonctions

5.1 Définitions et premières propriétés

5.1.1 Parité

Définition 1 (Fonction paire et impaire).
Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f.

- *On dit que f est* paire *si et seulement si $\forall x \in D_f$, on a :*

$$-x \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x)$$

- *On dit que f est* impaire *si et seulement si $\forall x \in D_f$, on a :*

$$-x \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)$$

Exemple 2.

- $f(x) = x^2$ *est paire*
- $f(x) = x^3$ *est impaire*
- $f(x) = \cos(x)$ *est paire*
- $f(x) = \sin(x)$ *est impaire*
- $f(x) = x\sin(x)$ *est paire*

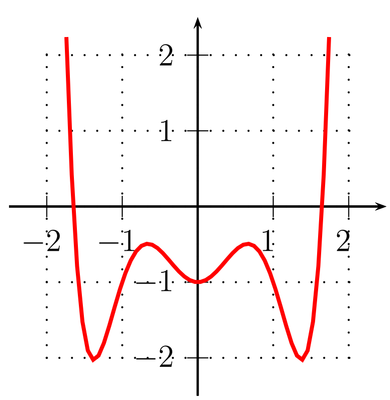
Remarque.
Une fonction peut n'être ni paire ni impaire. Par exemple, les fonctions $f(x) = 2x+1$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln(x)$ ne sont ni paires ni impaires.

Remarque.

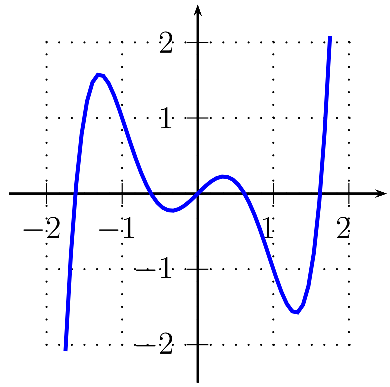
- *Le produit de 2 fonctions qui ont la même parité est une fonction paire*
- *Le produit de 2 fonctions qui sont de parité différente est une fonction impaire*

Théorème 3.
Soit f une fonction.

- *Une fonction f est paire si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées*



▷ *Une fonction f est impaire si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine*



5.1.2 Fonctions périodiques

Définition 4 (Période)**.**
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et soit $T \in]0, +\infty]$. On dit que T est une période *pour f si :*

$$\forall t \in D_f, \quad t + T \in D_f \quad \text{et} \quad f(t + T) = f(t)$$

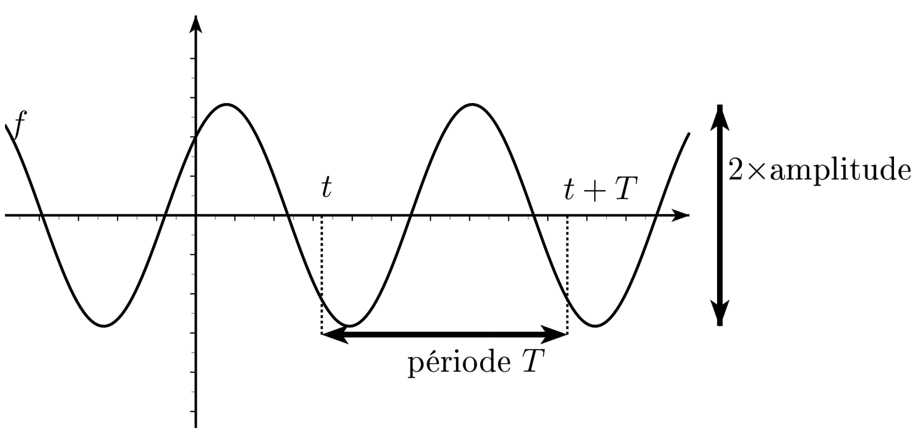
Remarque.
Si f admet T pour période alors f admet également nT avec $n \in \mathbb{Z}^*$ comme période. C'est pourquoi, dans la suite de ce cours, nous déterminerons toujours la plus petite période lorsque l'on cherche la période d'une fonction.

Définition 5 (Fonction périodique, pulsation et amplitude)**.**
*Soit f une fonction définie sur D_f et soit $T \in]0, +\infty]$. On dit que f est T-*périodique *(ou* périodique de période T*) si T est la plus petite des périodes pour f. On définit alors la* pulsation ω *de f par :*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

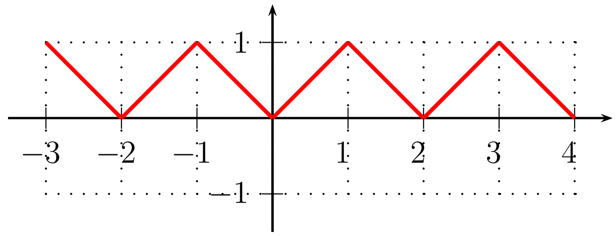
*et l'*amplitude A *de f par :*

$$A = \frac{\max(f) - \min(f)}{2}$$



Remarque.
Pour définir une fonction T-périodique, il suffit de la connaître sur un intervalle de longueur T.

Exemple 6.
Représenter sur le graphique ci-dessous la fonction 2-périodique définit par $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$. Puis donner son amplitude et sa pulsation.



Amplitude :

$$A = \frac{\max(f) - \min(f)}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

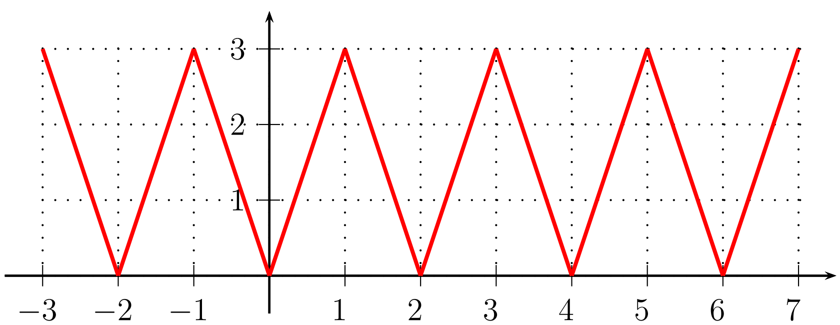
Pulsation :

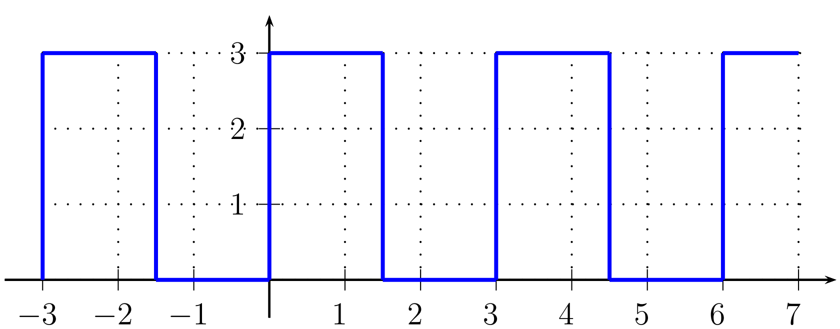
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Théorème 7.
Soient f une fonction T_f-périodique et g une fonction T_g-périodique.

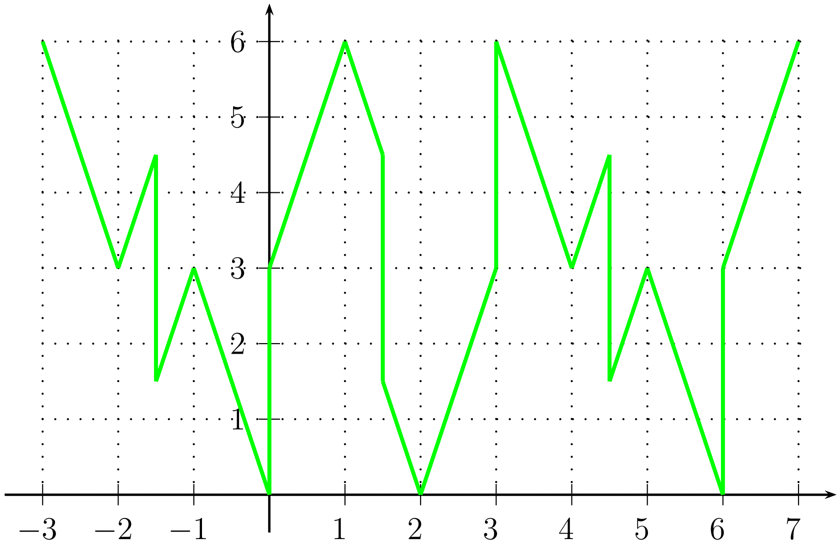
- ▷ *Pour tout réel non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$, λf est T_f-périodique*
- ▷ *Si $T_f = T_g$, alors $f + g$ est T_f-périodique*
- ▷ *Si $T_f \neq T_g$, alors $f + g$ est T-périodique avec $T = ppcm(T_f, T_g)$*

Exemple 8.
Considérons les fonctions f et g suivantes, respectivement de période 2 et 3 :





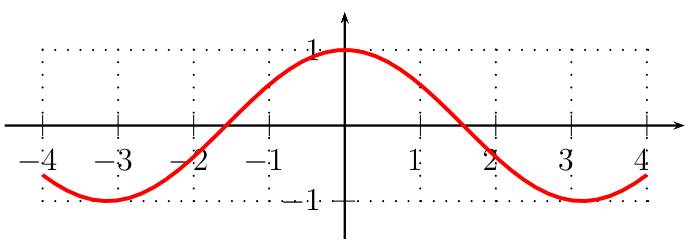
La fonction $h(t) = f(t) + g(t)$ est de période ppcm$(2, 3) = 6$ et a pour graphe :



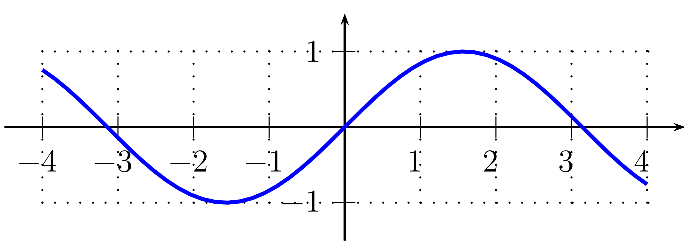
5.1.3 Fonctions cosinus et sinus

Théorème 9.

- *Soit la fonction $f(x) = \cos(x)$. f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\sin(x)$. f est une fonction paire et 2π-périodique, d'amplitude 1. La courbe représentative de f est :*



- *Soit la fonction $f(x) = \sin(x)$. f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos(x)$. f est une fonction impaire et 2π-périodique, d'amplitude 1. La courbe représentative de f est :*



Théorème 10.
Soit f une fonction trigonométrique telle que $f(t) = \cos(\omega t)$ ou $f(t) = \sin(\omega t)$. Alors f est T-périodique avec :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Exemple 11.
On considère les fonctions $f(x) = \cos(6x)$ *et* $g(x) = \sin(4x)$*. Déterminer les périodes de :* f, g *et* $h(x) = f(x) + g(x)$.

- ▷ f *est* T_f*-périodique avec* $T_f = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$
- ▷ g *est* T_g*-périodique avec* $T_g = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$
- ▷ h *est* T_h*-périodique avec* $T_h = ppcm\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right) = ppcm\left(\dfrac{2\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} ppcm(2,3) = \dfrac{\pi}{6} 3 \times 2 = \pi$

Remarque.
Soient $\omega > 0$ *et* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*. On considère la fonction* f *définie par :*

$$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

On rappelle que l'on peut écrire f *sous la. forme :*

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ *et* $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
La fonction f *est périodique de période* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$*, d'amplitude* $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ *et l'angle* φ *est appelé le déphasage par rapport à la fonction sinus.*

5.2 Opérations sur les fonctions

On munit le plan d'un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

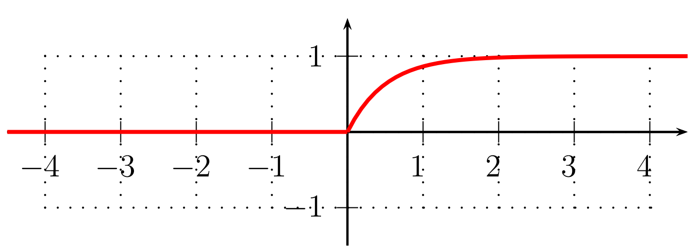
5.2.1 Retard et avance

Théorème 12.
Soit f *une fonction et soit* $\tau \in [0, +\infty[$*. On pose :*

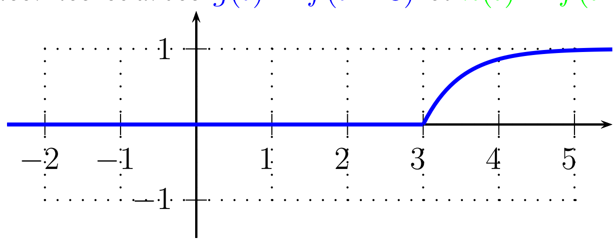
$$g(t) = f(t - \tau) \quad et \quad h(t) = f(t + \tau)$$

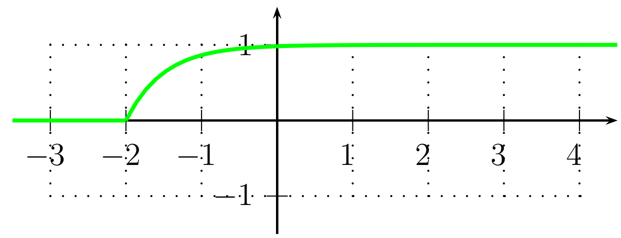
La courbe de g *est obtenue à partir de celle de* f *par translation de vecteur* $\tau\overrightarrow{i}$ *(vers la droite). La courbe de* h *est obtenue à partir de celle de* f *par translation de vecteur* $-\tau\overrightarrow{i}$ *(vers la gauche).*

Exemple 13.
Soit la fonction f *dont la courbe représentative est :*



Tracer les courbes $g(t) = f(t-3)$ et $h(t) = f(t+2)$:





Vocabulaire : On dit que g est **en retard par rapport à f et h est en avance par rapport à f.**

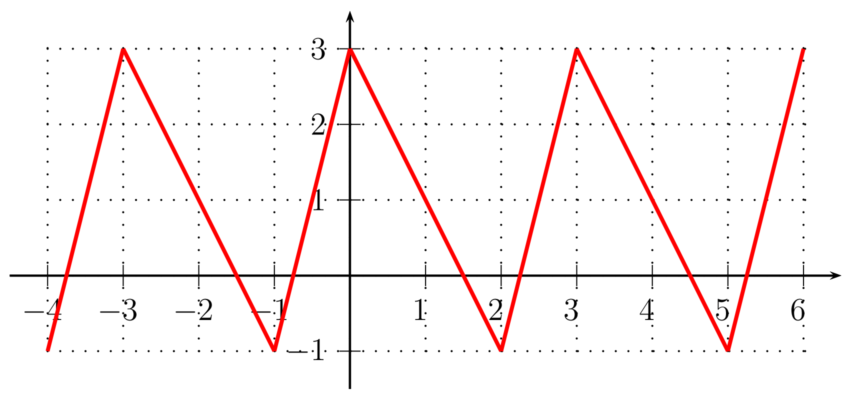
5.2.2 Changement d'amplitude

Théorème 14.
Soit f une fonction et soit $A \in [0, +\infty[$. On pose :

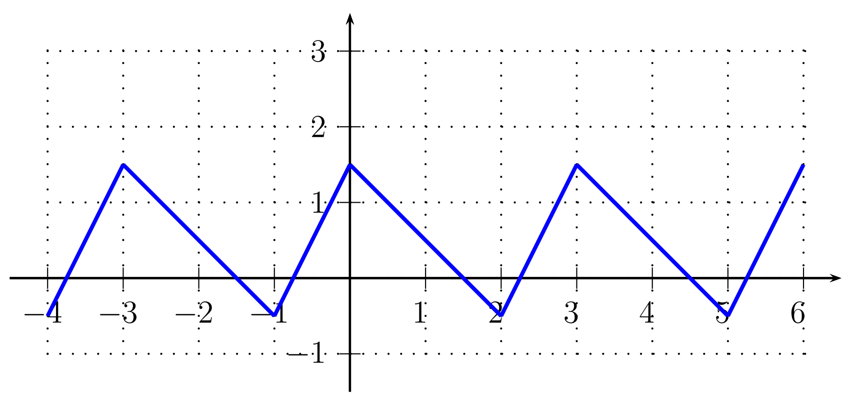
$$g(t) = Af(t)$$

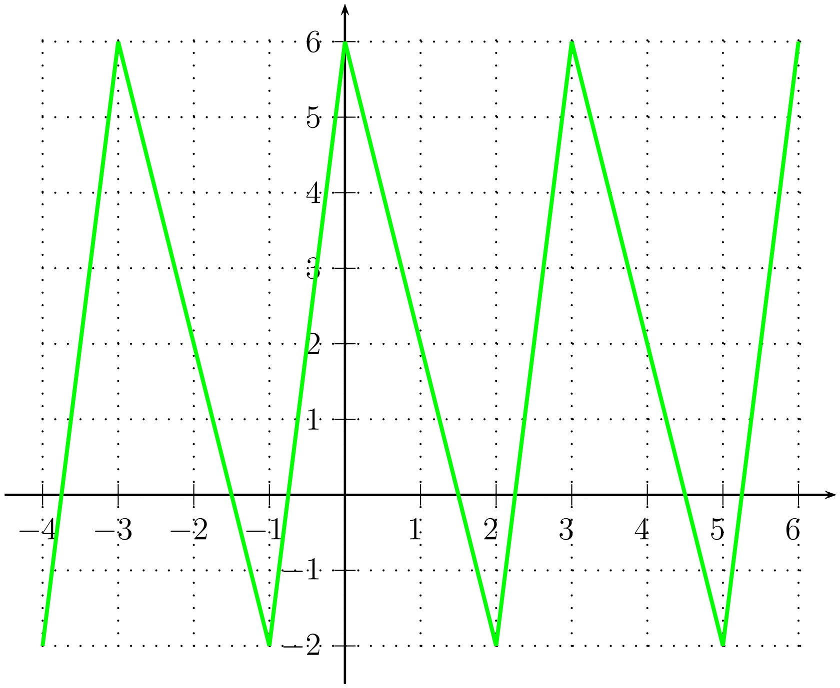
- *Si $A > 1$, la courbe représentative de g est obtenue en "augmentant" l'amplitude de la courbe de f d'un facteur A.*
- *Si $A < 1$, la courbe représentative de g est obtenue en "diminuant" l'amplitude de la courbe de f d'un facteur A.*

Exemple 15.
Soit la fonction f dont la courbe représentative est :



Tracer les courbes de $g(t) = \frac{1}{2}f(t)$ et $h(t) = 2f(t)$.



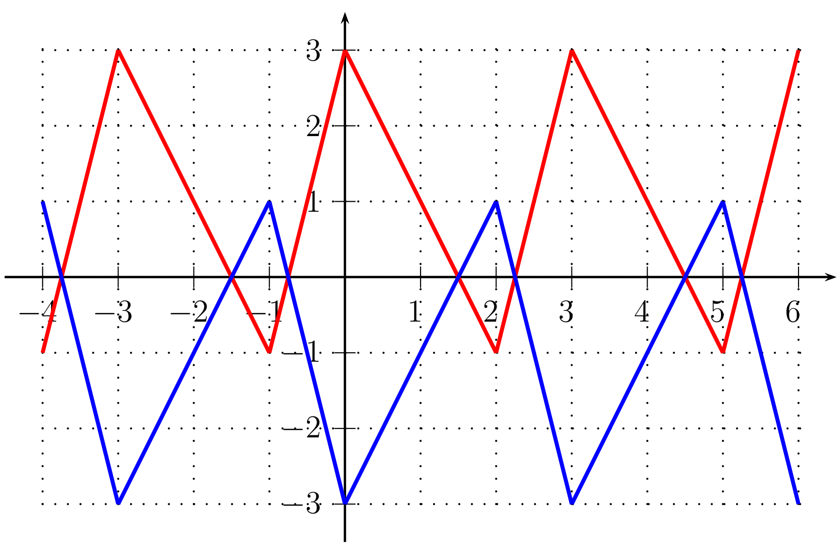


Théorème 16.
Soit f une fonction. On pose :

$$g(t) = -f(t)$$

La courbe représentative de g est obtenue à partir de celle de f par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple 17.
Soit la fonction f dont la courbe représentative est :



Tracer sur le graphique ci-dessus la courbe de $g(t) = -f(t)$.

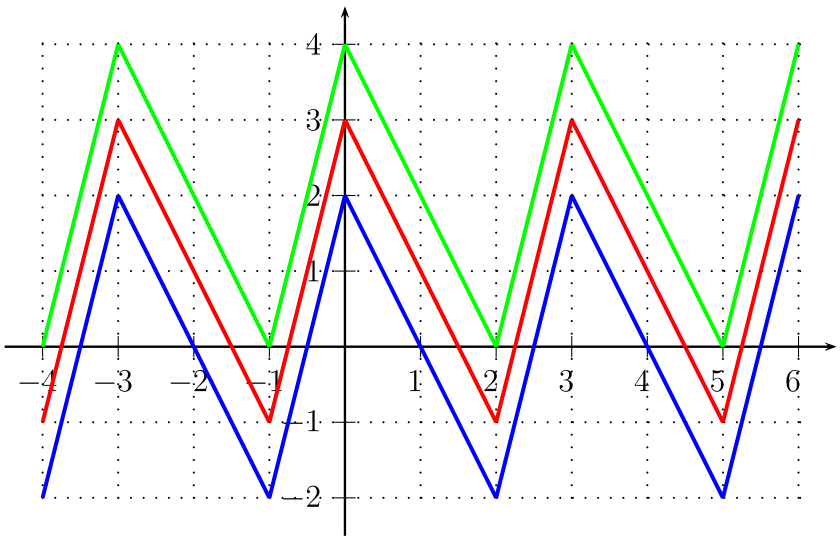
5.2.3 Offset

Théorème 18.
Soit f une fonction et soit $V \in \mathbb{R}$. On pose :

$$g(t) = f(t) + V$$

La courbe de g est obtenue à partir de celle de f par translation de vecteur $V\overrightarrow{j}$ (vers le haut si V est positif et vers le bas si V est négatif).

Exemple 19.
Soit la fonction f dont la courbe représentative est :



Tracer sur le graphique ci-dessus les courbes de $g(t) = f(t) - 1$ et $h(t) = f(t) + 1$.

Remarque.
En génie électrique, si f est un signal sinusoïdal, on détermine la valeur moyenne de f notée V_{moy} puis on applique un offset de $-V_{moy}$ pour obtenir un signal de valeur moyenne nulle ("centré à la hauteur" 0).

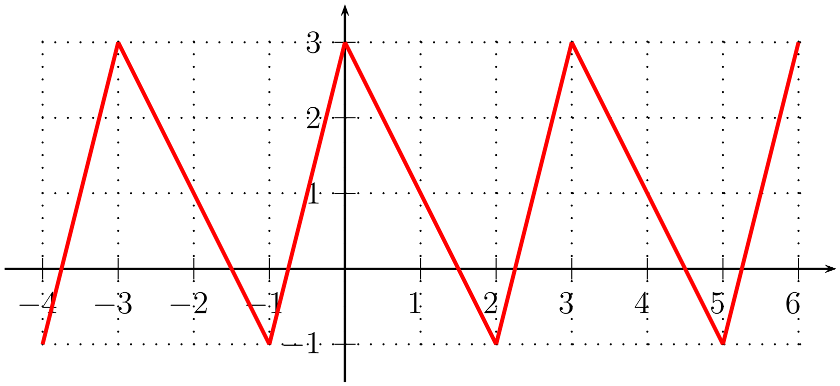
5.2.4 Dilatation du temps

Théorème 20.
Soit f une fonction et soit $\omega \in]0, +\infty[$. On pose :

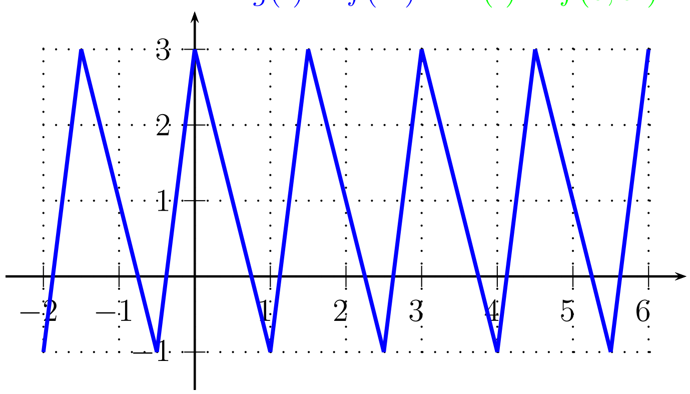
$$g(t) = f(\omega t)$$

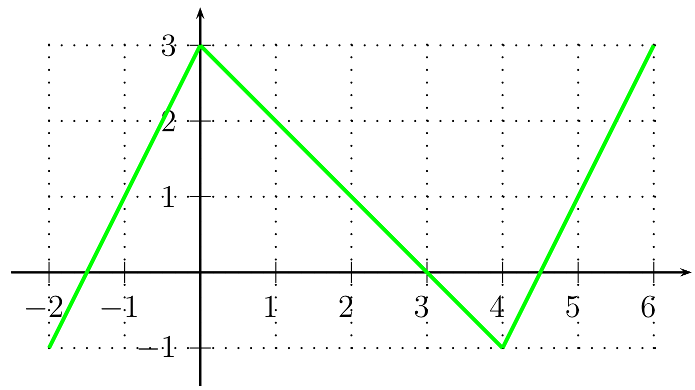
- *Si $\omega > 1$ (par exemple $\omega = 2$), la courbe représentative de g est obtenue à partir de celle de f par "compression horizontale" de facteur ω : le temps défile ω fois* **plus vite** *(e.g. 2 fois plus vite) et la période est* **divisée** *par ω (e.g. divisée par 2).*
- *Si $\omega < 1$, alors il existe $\omega_2 > 1$ tel que $\omega = \dfrac{1}{\omega_2}$ (par exemple si $\omega = 0,5 = \dfrac{1}{2}$ alors $\omega_2 = 2$) et la courbe représentative de g est obtenue à partir de celle de f par "dilatation horizontale" de facteur ω_2 : le temps défile ω_2 fois* **plus lentement** *(e.g. 2 fois plus lentement) et la période est* **multipliée** *par ω_2 (e.g. multipliée par 2).*

Exemple 21.
Soit la fonction f dont la courbe représentative est :



Tracer les courbes de $g(t) = f(2t)$ *et* $h(t) = f(0,5t)$.



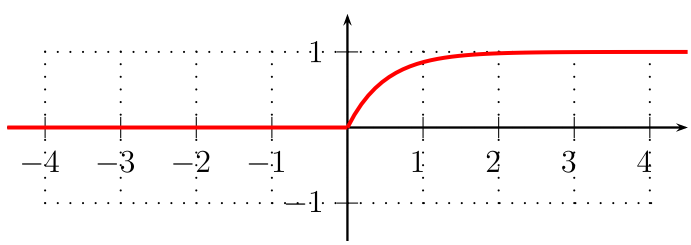


Théorème 22.
Soit f une fonction. On pose :

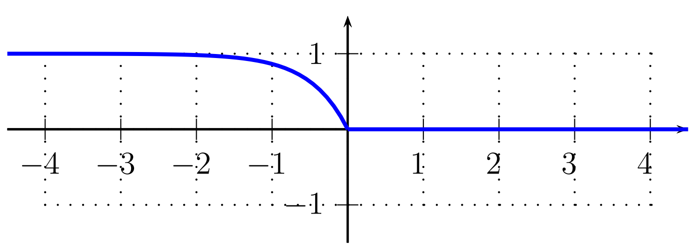
$$g(t) = f(-t)$$

La courbe représentative de g est obtenue à partir de celle de f par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (on inverse le temps).

Exemple 23.
Soit la fonction f dont la courbe représentative est :



Tracer sur le graphique ci-dessus les courbes de $g(t) = f(-t)$ *:*



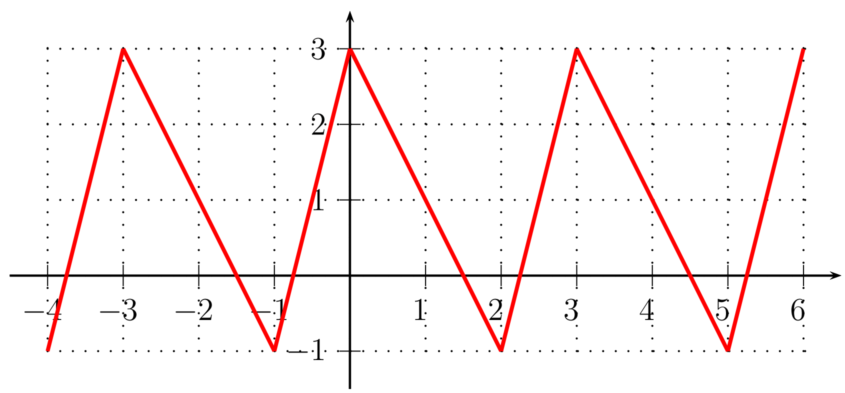
5.2.5 Redressement

Théorème 24.
Soit f une fonction. On pose :

$$g(t) = |f(t)|$$

- *Si $f(t) > 0$ alors la courbe représentative de g est identique à celle de f*
- *Si $f(t) < 0$ alors la courbe représentative de g est la symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses*
- *Si f prend alternativement des valeurs positives et des valeurs négatives, on se ramène à des intervalles sur lesquels $f(t) < 0$ et $f(t) > 0$.*

Exemple 25.
Soit la fonction f dont la courbe représentative est :



Tracer la courbe de $g(t) = |f(t)|$.