6 Nombres Complexes

6.1 Forme algébrique

Définition 1 (Nombres complexes).
On note i le nombre imaginaire tel que :

$$i^2 = -1$$

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres dit complexes, *qui s'écrivent :*

$$z = a + ib$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On peut aussi écrire :

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$$

Remarque.

- ▷ $\mathbb{R}$ *est inclus dans* $\mathbb{C}$*, ce qui s'écrit :* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- ▷ *Si* $z = ib$ *avec* $b \in \mathbb{R}$ *alors* z *est un* imaginaire pur

Exemple 2.

- ▷ $2 + 3i \in \mathbb{C}$
- ▷ $i - 1 \in \mathbb{C}$
- ▷ $32i \in \mathbb{C}$ *(imaginaire pur)*
- ▷ $4 \in \mathbb{C}$ *(réel)*

Définition 3 (Partie réelle, partie imaginaire et forme algébrique).
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

- ▷ a *est appelé* partie réelle *de* z *et notée* $\mathfrak{Re}(z)$
- ▷ b *est appelé* partie imaginaire *de* z *et notée* $\mathfrak{Im}(z)$
- ▷ $a + ib$ *est appelé* forme algébrique *de* z

Remarque.
La forme algébrique d'un nombre complexe est unique. On en déduit donc que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Proposition 4.
Soient $z_1 \in \mathbb{C}$ *et* $z_2 \in \mathbb{C}$.

1. $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda z_1 \in \mathbb{C}$
3. $z_1 \times z_2 \in \mathbb{C}$
4. $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$ *avec* $z_2 \neq 0$

Proposition 5 (Règles de calcul).
Soient $z_1 = a_1 + ib_1 \in \mathbb{C}$ *et* $z_2 = a_2 + ib_2$*. On a :*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

et

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Exemple 6.

- ▷ $(1+i)+(2-3i)=3-2i$
- ▷ $i(3+4i)=-4+3i$
- ▷ $(1+2i)(2+i)=2+i+4i-2=5i$

Proposition 7 (Identités remarquables)**.**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

1. $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$
2. $(a-ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$
3. $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

6.2 Conjugué

Définition 8 (Conjugué)**.**
Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$. On note $\overline{z}$ le conjugué *de z, défini par :*

$$\overline{z} = a - ib$$

Exemple 9.

- ▷ $\overline{2+3i} = 2-3i$
- ▷ $\overline{i-1} = -i-1$
- ▷ $\overline{32i} = -32i$
- ▷ $\overline{4} = 4$

Proposition 10.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

- ▷ $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in R$ *est un réel*
- ▷ $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ *est un imaginaire pur*
- ▷ $z = \overline{\overline{z}}$

Proposition 11.
Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$. On a :

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

Méthode
Pour mettre un quotient de nombres complexes $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, on multiplie en haut et en bas par $\overline{z_2}$.

Exemple 12.
Mettre $z = \dfrac{2+3i}{1-i}$ sous forme algébrique.

$$z = \frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+3i-3}{1+i-i+1} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

Proposition 13 (Propriétés du conjugué).
Soient $z_1 \in \mathbb{C}$ *et* $z_2 \in \mathbb{C}$.

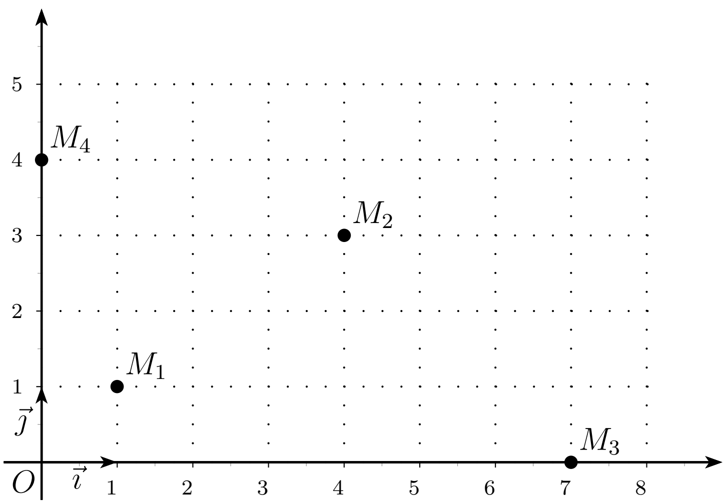
1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ *avec* $z_2 \neq 0$
4. $\overline{z_1^n} = (\overline{z_1})^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

6.3 Interprétation géométrique

On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Définition 14 (Image et affixe).
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. *Le nombre complexe* z *est représenté par le point* M *de* $\mathbb{R}^2$ *de coordonnées* (a, b). *On dit que* M *est l'*image *de* z *et que* z *est l'*affixe *de* M.

Exemple 15.



- $z_1 = 1 + i$ *est l'affixe de* M_1
- $z_2 = 4 + 3i$ *est l'affixe de* M_2
- $z_3 = 7$ *est l'affixe de* M_3
- $z_4 = 4i$ *est l'affixe de* M_4

Définition 16 (Module et argument).
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

- *On appelle* module *de* z *LA valeur notée* $|z| \in \mathbb{R}_+$ *définie par :*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$$

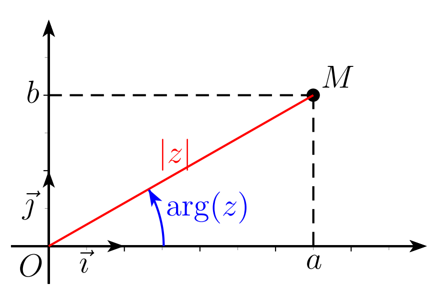
où O *est l'origine du repère et* M *l'affixe de* z

- *On appelle* argument *de* z *UNE valeur notée* $\arg(z) \in \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\arg(z) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$$

ou encore

$$\begin{cases} \cos(\arg(z)) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\arg(z)) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$



Exemple 17.
Soit $z = 2 - 2i$.

- *Le conjugué de* z *est* $\overline{z} = 2 + 2i$
- *Le module de* z *est* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
- *L'argument de* z *est tel que :*

$$\begin{cases} \cos(\arg(z)) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\arg(z)) & = & \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

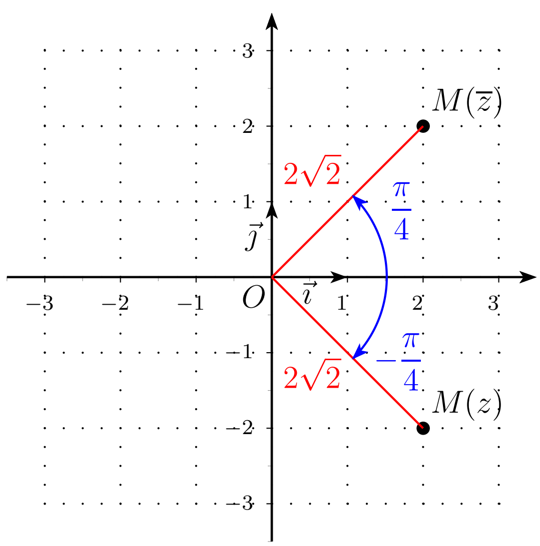
  Donc $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}$

- *Le module de* $\overline{z}$ *est* $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = 2\sqrt{2}$
- *L'argument de* $\overline{z}$ *est tel que :*

$$\begin{cases} \cos(\arg(\overline{z})) & = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\arg(\overline{z})) & = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

  Donc $\arg(\overline{z}) = \dfrac{\pi}{4}$

On peut retrouver toutes ces informations graphiquement.



Proposition 18.
Soit $z \in \mathbb{C}$. *On a :*

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

6.4 Forme trigonométrique

Proposition 19.
Soit $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $z = a + ib$. z *peut s'écrire sous la forme :*

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

où $r = |z|$ *et* $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$. *Cette forme est appelée* forme trigonométrique.

Méthode
Pour mettre un nombre complexe $z = a + ib$ sous forme trigonométrique,

1. On calcule le module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. On cherche l'argument de z : $\begin{cases} \cos(\arg(z)) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\arg(z)) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$
3. On conclue : $z = |z| (\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$

Exemple 20.
Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$. Mettre z sous forme trigonométrique.

1. *On calcule le module de $|z|$:*
$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$
2. *On cherche l'argument de z :*
$$\begin{cases} \cos(\arg(z)) & = & \dfrac{1}{2} \\ \sin(\arg(z)) & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
donc $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$
3. *On conclue :*
$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

6.5 Forme exponentielle

Proposition 21.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + ib$. z peut s'écrire sous la forme :
$$z = re^{i\theta}$$
où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$. Cette forme est appelée forme exponentielle.

Exemple 22.
Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$. Mettre z sous forme exponentielle.
On utilise la même méthode que pour mettre sous forme trigonométrique mais on change la conclusion.

1. *On calcule le module de z : $|z| = 2$*
2. *On cherche l'argument de z : $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$*
3. *On conclue :*
$$z = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$$

6.6 Propriétés

Théorème 23 (Formules d'Euler).
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad et \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Remarque.
Les formules d'Euler permettent notamment de linéariser des expressions de la forme $\cos^n(x)$ *ou* $\sin^n(x)$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$ *un entier.*

Exemple 24.
Linéariser $\sin(3x)\cos^2(x)$*. On utilise les formules d'Euler :*

$$\begin{aligned}
\sin(3x)\cos^2(x) &= \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \times \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \times \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^2}{4} \\
&= \frac{(e^{i3x} - e^{-i3x})(e^{i2x} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-i2x})}{8i} \\
&= \frac{(e^{i3x} - e^{-i3x})(e^{i2x} + 2 + e^{-i2x})}{8i} \\
&= \frac{e^{i5x} + 2e^{i3x} + e^{ix} - e^{-ix} - 2e^{-i3x} - e^{-i5x}}{8i} \\
&= \frac{(e^{i5x} - e^{-i5x}) + 2(e^{i3x} - e^{-i3x}) + (e^{ix} - e^{-ix})}{8i} \\
&= \frac{2i\sin(5x) + 2 \times 2i\sin(3x) + 2i\sin(x)}{8i} \\
&= \frac{\sin(5x) + 2\sin(3x) + \sin(x)}{4}
\end{aligned}$$

Proposition 25 (Propriétés du module)**.**
Soient $z_1 \in \mathbb{C}$ *et* $z_2 \in \mathbb{C}$*.*

1. $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ *avec* $z_2 \neq 0$
3. $|\overline{z_1}| = |z_1|$
4. $|z_1^n| = |z_1|^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$
5. $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}$
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Inégalité triangulaire)*

Proposition 26 (Propriétés de l'argument)**.**
Soient $z_1 \in \mathbb{C}$ *et* $z_2 \in \mathbb{C}$*.*

1. $\arg(\overline{z_1}) = -\arg(z_1)\ [2\pi]$
2. $\arg(-z_1) = \arg(z_1) + \pi\ [2\pi]$
3. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$
4. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$ *avec* $z_2 \neq 0$
5. $\arg(z_1^n) = n\arg(z_1)\ [2\pi]$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

6.7 Équations à coefficients complexes

On cherche à résoudre l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0$$

où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$.

Mais si $\Delta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ alors $\sqrt{\Delta}$ n'a pas de sens...

Définition 27 (Racine carrée d'un complexe).
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée *de z les nombres complexes Z tels que :*

$$Z^2 = z$$

Méthode
Pour trouver les racines carrées d'un nombre complexe,

1. On pose $Z = \alpha + i\beta$
2. On développe $Z^2 = (\alpha + i\beta)^2$
$$Z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$$
3. On identifie les parties réelles, les parties imaginaires et les modules de Z^2 et z
$$Z^2 = z \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a + ib$$
d'où
$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(Z^2) & = & \mathfrak{Re}(z) \\ \mathfrak{Im}(Z^2) & = & \mathfrak{Im}(z) \\ |Z^2| & = & |z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 & = & a \\ 2\alpha\beta & = & b \\ \alpha^2 + \beta^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$
4. On trouve α et β (et donc $Z = \alpha + i\beta$) en résolvant ce dernier système

Remarque.
Il ne faut pas écrire $\sqrt{a + ib}$, cela n'a pas de sens !

Exemple 28.
Trouver les racines carrées de $z = 1 + i$.

1. *On cherche $Z = \alpha + i\beta$ tel que $Z^2 = z$*
2. *On a alors $Z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$*
3. *En identifiant les parties réelles, les parties imaginaires et les modules, on trouve le système suivant :*

$$\begin{aligned} Z^2 = z \quad & \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 1 + i \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 & = & 1 & (E1) \\ 2\alpha\beta & = & 1 & (E2) \\ \alpha^2 + \beta^2 & = & \sqrt{2} & (E3) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 & = & 1 + \sqrt{2} & (E1) + (E3) \\ 2\beta^2 & = & \sqrt{2} - 1 & (E3) - (E1) \\ \alpha\beta & = & \dfrac{1}{2} & (E2) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 & = & \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2} \\ \beta^2 & = & \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} \\ \alpha\beta & = & \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

4. *Donc* $\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$ *et* $\beta = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ *or* $\alpha\beta = \dfrac{1}{2} > 0$ *donc* α *et* β *sont de même signe.*
   Donc les racines carrées de $z = 1 + i$ *sont :*

$$Z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

   et

$$Z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Proposition 29.
Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ *et* $c \in \mathbb{C}$. *On pose* $\Delta = b^2 - 4ac$. *L'équation du second degré,*

$$az^2 + bz + c = 0$$

admet pour solution(s) :

- ▷ *Si* $\Delta \in \mathbb{R}$ *et* $\Delta > 0$,

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- ▷ *Si* $\Delta \in \mathbb{R}$ *et* $\Delta = 0$,

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- ▷ *Si* $\Delta \in \mathbb{R}$ *et* $\Delta < 0$,

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- ▷ *Si* $\Delta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$,

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

  où $\delta \in \mathbb{C}$ *est une racine carrée de* Δ

Exemple 30.

1. *Résoudre* $z^2 + 3z - 4 = 0$

$$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$$

   Les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-3+5}{2} = 1 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$$

2. *Résoudre* $z^2 - 6z + 9 = 0$

$$\Delta = 36 - 36 = 0$$

   La solution est :

$$z_0 = \frac{6}{2} = 3$$

3. *Résoudre* $z^2 + 4z + 5 = 0$

$$\Delta = 16 - 20 = -4 = i^2 \times 2^2 = (2i)^2$$

Les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-4+2i}{2} = -2 + i \quad \textit{et} \quad z_2 = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i$$

4. *Résoudre* $z^2 + (1+i)z + 2i = 0$

$$\Delta = (1+i)^2 - 8i = 2i - 8i = -6i$$

On cherche alors $\delta \in \mathbb{C}$ *tel que* $\delta^2 = -6i$

(a) *On pose* $\delta = \alpha + i\beta$

(b) *On a alors* $\delta^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$

(c) *En identifiant les parties réelles, les parties imaginaires et les modules, on trouve le système suivant :*

$$\begin{aligned}
\delta^2 = -6i \quad & \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = -6i \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0 & (E1) \\ 2\alpha\beta = -6 & (E2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 6 & (E3) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha^2 = 6 & (E1) + (E3) \\ 2\beta^2 = 6 & (E3) - (E1) \\ \alpha\beta = -3 & (E2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 = 3 \\ \beta^2 = 3 \\ \alpha\beta = -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

(d) *Donc* $\alpha = \pm\sqrt{3}$ *et* $\beta = \pm\sqrt{3}$ *or* $\alpha\beta = -3 < 0$ *donc* α *et* β *sont de signes opposés. On en déduit donc que*

$$\delta_1 = \sqrt{3} - i\sqrt{3} \quad \textit{et} \quad \delta_2 = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$$

sont des racines carrées de $\Delta = -6i$.

(e) *On choisit* $\delta = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-(1+i) + \sqrt{3} - i\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 - i(\sqrt{3}+1)}{2}$$

et

$$z_2 = \frac{-(1+i) - (\sqrt{3} - i\sqrt{3})}{2} = \frac{-(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)}{2}$$