Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 4
Vendredi 21 décembre 2018 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Écrire sous forme algébrique et sous forme exponentielle $z = \left(5 + 5\sqrt{3}i\right)^3$

Confère DS précedent.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$

1. $z^2 = 3 + 4i$

   D'après le cours, on obtient le sytème suivant : $\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 3 & (1) \\ 2ab & = & 4 & (2) \\ a^2 + b^2 & = & 5 & (3) \end{cases}$

   $(1) + (3) \Rightarrow 2a^2 = 8$ d'où $a = \pm 2$
   $(1) \Rightarrow b^2 = a^2 - 3 = 4 - 3 = 1$ d'où $b = \pm 1$
   D'après (2), a et b sont de même signe, d'où

   $$\mathcal{S} = \{\pm(2 + i)\}$$

2. $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$

   On calcule le discriminant $\Delta = (3i - 4)^2 - 4(1 - 7i) = -9 - 24i + 16 - 4 + 28i = 3 + 4i$. On a calculé les racines de Δ dans la question précédente. On en déduit que les solution sont :

   $$z_1 = \frac{-(3i - 4) + 2 + i}{2} = 3 - i \text{ et } z_2 = \frac{-(3i - 4) - 2 - i}{2} = 1 - 2i$$

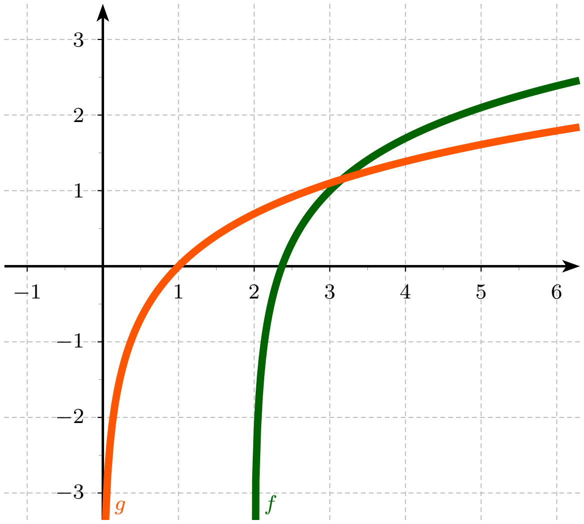
3. $z^2 + 4 = 0$

   Les solutions sont $\pm 2i$.

Exercice 3

1. Déterminer les constantes a et b (justifier soigneusement votre démarche) pour que

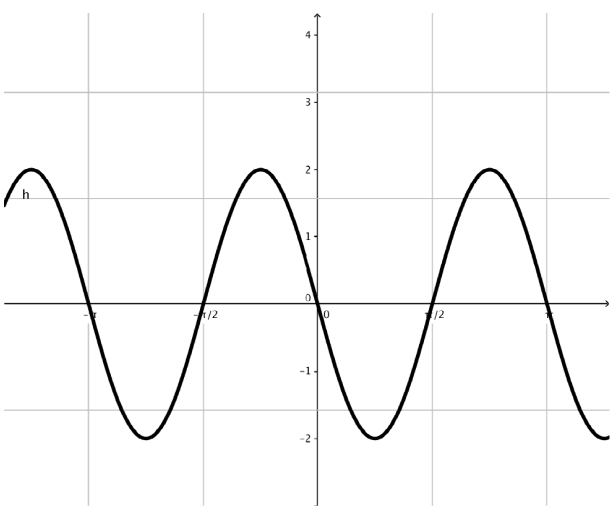
   $$g(x) = f(x + a) + b$$



On a $g(x) = f(x+2) - 1$

2. Déterminer les constantes A, B et C (justifier soigneusement votre démarche) pour que

$$h(x) = A\sin(Bx + C)$$



On a $h(x) = 2\sin(2x - \pi)$

Exercice 4 Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1}$

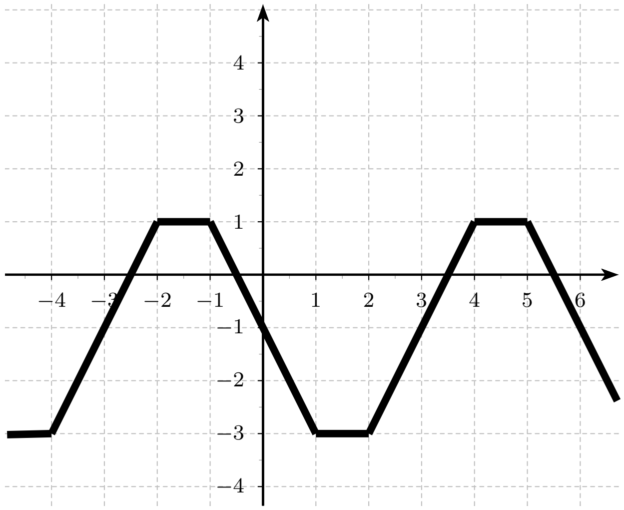
   Il s'agit d'une forme indéterminée. On factorise le dénominateur : $\dfrac{x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1}$. D'où :
   $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$

2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2}{x^2+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos(0) = 1$

4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x^{10}+1)e^{-5x} = 0$ (croissances comparées)

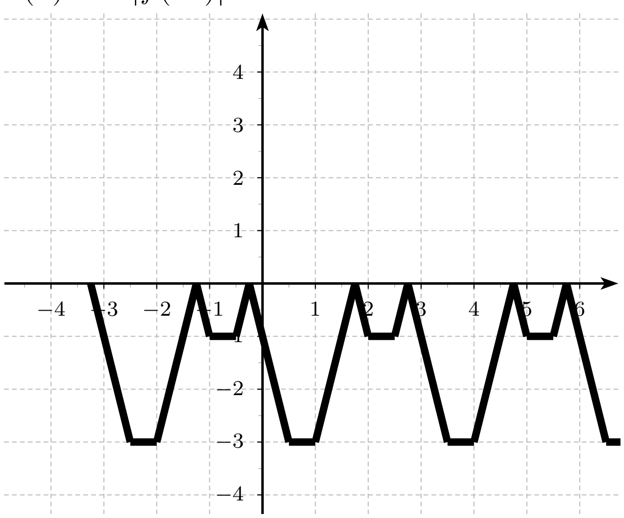
Exercice 5 Voici le graphe d'une fonction périodique f :



1. Déterminer la parité et la période de f.

   La fonction f n'est ni paire ni impaire. Elle est périodique de période 6.

2. Représenter sur le graphique ci-dessous (en justifiant votre démarche) la courbe représentative de $h(x) = -|f(2x)|$



3. Déterminer la périodicité de la fonction $g(x) = f(3x+1) + f(5x)$

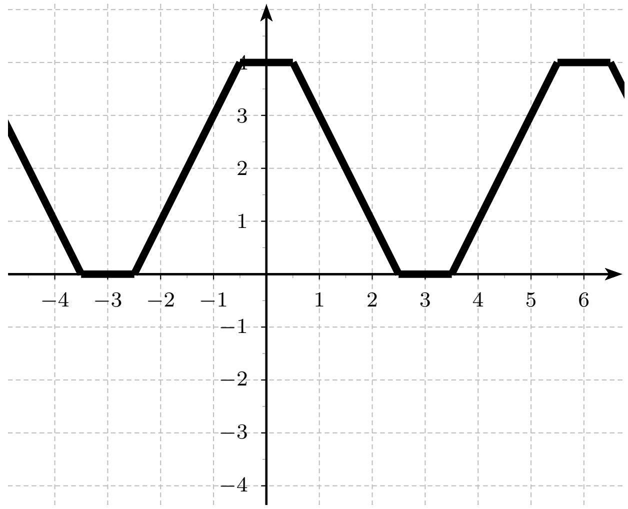
   La fonction $f(3x+1)$ est périodique de période $\dfrac{6}{3} = 2$ et la fonction $f(5x)$ est périodique de période $\dfrac{6}{5}$. La période de la fonction g est la plus petite période commnune multiple de 2 et de $\dfrac{6}{5}$:

$$\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{18}{5}, \frac{24}{5}, \frac{30}{5} = 6 \ldots$$
$$2, 4, 6 \ldots$$

   Le fonction g est donc périodique de période 6

4. (a) Déterminer a et b pour que la fonction $p(x) = f(x+a) + b$ soit paire.

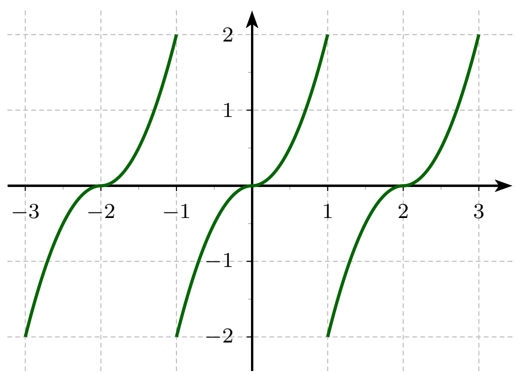
   On peut prendre $a = -\dfrac{3}{2}$ et $b = 3$ (n'importe quelle valeur de b convient aussi !).



(b) Représenter p sur le graphique ci-contre.

Exercice 6 Les questions suivantes sont indépendantes

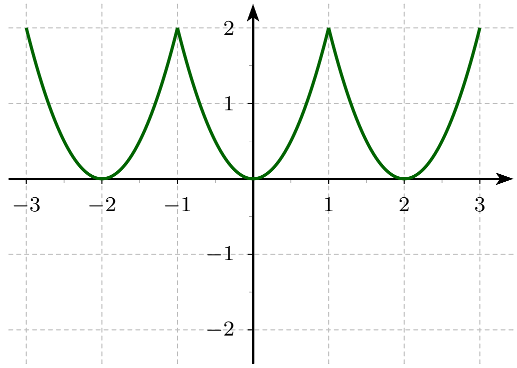
1. Tracer sur le graphique ci-dessous la fonction f telle que :
   (a) $f(x) = 2x^2$ pour $0 \leq x \leq 1$
   (b) f est impaire
   (c) f est périodique de période 2



2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

   Graphiquement, on voit que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas continue en les points $k \in \mathbb{N}$ (on ne peut pas tracer la courbe sans lever le crayon).
3. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

   La fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ donc elle n'est pas non plus dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Tracer sur le graphique ci-dessous la fonction g telle que :
   (a) $g(x) = 2x^2$ pour $0 \leq x \leq 1$
   (b) g est paire
   (c) g est périodique de période 2



5. La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

   Graphiquement, on voit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (on peut tracer la courbe sans lever le crayon).

6. La fonction g est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

   La fonction f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ car les pentes de la courbe de la fonction g sont différentes à gauche et à droite en les points $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

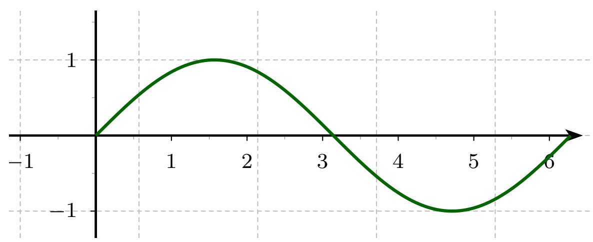
Soit $f_2(x)$ la fonction définie par :

$$f_2(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin(x-\pi) & \text{si } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

(a) Représenter la fonction f_2 sur le graphique ci-contre.

On remarque $-\sin(x-\pi) = \sin(x)$. Cela revient donc à tracer la courbe de $\sin(x)$ sur $[0, 2\pi]$.

(b) Graphiquement, déterminer si $f_2(x)$ est continue sur $[0, 2\pi]$



On peut tracer la courbe sans lever le crayon donc la fonction f_2 est continue.