Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 4
Vendredi 22 décembre 2017 - Durée : 1h15

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Mettre les nombres complexes sous forme exponentielle :

   (a) $Z_1 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$.

   (b) $Z_2 = -\overline{Z_1} = -1 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = e^{i\pi} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$

2. Mettre les nombres complexes sous forme algébrique

   (a) $Z_3 = (2-i)(3+2i)^2 = (2-i)(9+12i-4) = (2-i)(5+12i) = 10+12-5i+24i = 22+19i$

   (b) $Z_4 = \dfrac{7-4i}{5+11i} = \dfrac{(7-4i)(5-11i)}{(5+11i)(5-11i)} = \dfrac{35-20i-77i-44}{25+121} = \dfrac{-9-97i}{146} = -\dfrac{9}{146} - \dfrac{97}{146}i$

Exercice 2 Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Dire si l'équivalence suivante est vraie ou fausse : $\sqrt{x}-1 \underset{1}{\sim} x-1$

   On calcule la limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}\\ &= f'(1)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{1}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   avec $f(x)=\sqrt{x}$ et donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   Conclusion : Comme la limite du quotient ne fait pas 1, l'équivalence et fausse.

2. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\displaystyle\lim_{t\to3}\frac{t^2-2t-3}{2t^2-18} = \lim_{t\to3}\frac{(t-3)(t+1)}{(t-3)(2t+6)} = \lim_{t\to3}\frac{t+1}{2t+6} = \frac{1}{3}$

(b) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2 - 2t - 3}{2t^2 - 18} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2}{2t^2} = \dfrac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2 - 2t - 3}{e^{t-5}} = 0$ par croissances comparées.

Exercice 3 Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

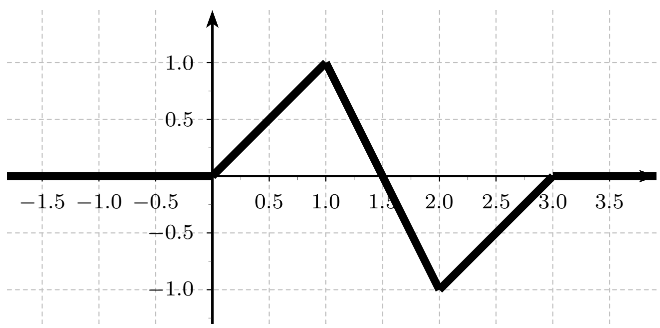
1. Tracer le plus précisément possible, le graphe de la fonction

$$f(t) = tU(t) + (3 - 3t)U(t-1) + (3t - 6)U(t-2) + (3 - t)U(t-3)$$

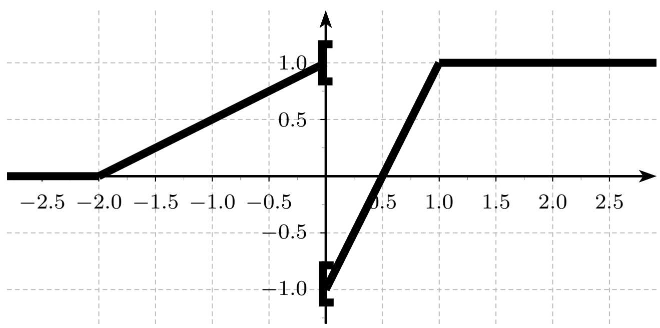
On a

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t & \text{si} \quad t \in [0;1[\\ -2t+3 & \text{si} \quad t \in [1;2[\\ t-3 & \text{si} \quad t \in [2;3[\\ 0 & \text{si} \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Donc



2. Soit la fonction g dont la courbe est



Déterminer une écriture de la fonction g en utilisant la fonction échelon.
On identifie que

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -2 \\ \frac{1}{2}t + 1 & \text{si} \quad t \in [-2;0[\\ 2t-1 & \text{si} \quad t \in [0;1[\\ 1 & \text{si} \quad t \geq 2 \end{cases}$$

Donc

$$g(t) = \left(\frac{1}{2}t + 1\right)\mathcal{U}(t+2) + \left(\frac{3}{2}t - 2\right)\mathcal{U}(t) + (-2t+2)\mathcal{U}(t-1)$$

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - a & \text{si} \quad t < 1 \\ -(t-a)^2 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les 2 valeurs de a pour lesquelles f est continue en 1. Il faut que la limite à gauche et la limite à droite en 1 de f soient égales. Donc on résout

$$1 - a = -(1-a)^2$$

On développe et on trouve 2 solutions : $a = 1$ et $a = 2$.

2. Pour $a = 2$, la fonction f est-elle dérivable en 1 ? Pour $a = 2$ la fonction est continue, il est donc pertinent de se demander si elle est dérivable.
Il faut que le nombre dérivé à gauche en 1 soit égal au nombre dérivé à droite.

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = \lim_{t\to 1^-} \frac{t^2 - 2 - (-1)}{t-1} = \lim_{t\to 1^-} \frac{t^2-1}{t-1} = \lim_{t\to 1^-} \frac{(t-1)(t+1)}{t-1} = \lim_{t\to 1^-} t+1 = 2$$

et

$$\lim_{t\to 1^+} \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = \lim_{t\to 1^+} \frac{-(t-2)^2 - (-1)}{t-1} = \lim_{t\to 1^+} \frac{-t^2+4t-3}{t-1} = \lim_{t\to 1^+} \frac{(t-1)(-t+3)}{t-1} = \lim_{t\to 1^+} -t+3 = 2$$

Donc f est dérivable en 1.

Exercice 5 Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soit la fonction $f_1(t) = t^2 - 3$.

(a) Déterminer $f_1\left(]2;4]\right)$ et $f_1\left(]-2;3[\right)$.
On cherche l'ensemble image de $]2;4]$ par la fonction f_1. Sur cet intervalle la fonction est croissante donc :

$$f_1\left(]2;4]\right) =]f_1(2); f_1(4)] =]1;13]$$

On cherche l'ensemble image de $]-2;3]$ par la fonction f_1. Sur cet intervalle la fonction atteint son minimum en 0 : $f_1(0) = -3$ et comme $f_1(3) = 6$ est strictement supérieur à $f_1(-2)$ on a

$$f_1\left(]-2;3[\right) = [-3;6[$$

(b) Déterminer la fonction $k(t)$ telle que pour tout $t > 0$ on a $k \circ f_1(t) = t$.
On pose $k(t)\sqrt{t+3}$. Vérification

$$k \circ f_1(t) = \sqrt{f_1(t)+3} = \sqrt{t^2 - 3 + 3} = \sqrt{t^2} = |t|$$

Et donc, pour $t < 0$ on a bien $k \circ f_1(t) = t$.

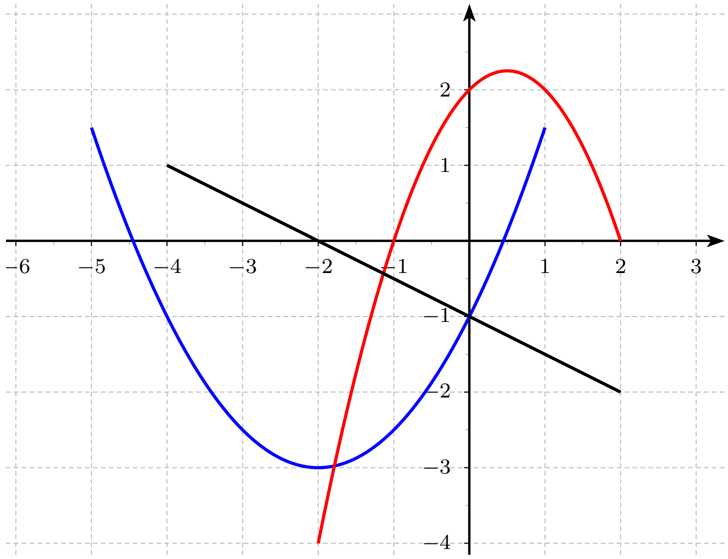
2. Soient les fonctions u, v et w suivantes :

$$u(t) = t - 5, \qquad v(t) = t^2 \qquad \text{et} \qquad w(t) = 2t + 3$$

Décomposer $f_2(t) = 2t^2 - 7$ comme composée de 3 fonctions en utilisant les fonctions u, v et w.
On a

$$f_2(t) = 2(t^2 - 5) + 3 = w \circ u \circ v(t)$$

3. Soient les fonctions f, g et h définies sur $D_f = [-5;1]$, $D_g = [-2;2]$ et $D_h = [-4;2]$ et dont les courbes représentatives sont



C_f est en bleue, C_g est en rouge, C_h est en noire.

(a) Est-il possible de calculer $f \circ g(t)$ pour toute valeur t de D_g ?
NON ! Pour $t = 1$ (par exemple) on a $g(1) = 2$. Et donc $g(1) \notin D_f$. Donc $f \circ g(1)$ n'est pas défini.

(b) Déterminer les valeurs de $f \circ h(-2)$ et $f \circ h(2)$.
On commence par lire les valeurs de h : $h(-2) = 0$ donc

$$f \circ h(-2) = f(0) = -1$$

et, $h(2) = -2$ donc

$$f \circ h(2) = f(-2) = -3$$