Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 17 décembre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 ***(35 minutes)*** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $y'(t) + 3y(t) = 2t + 1$

   (b) $\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = \cos(2t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

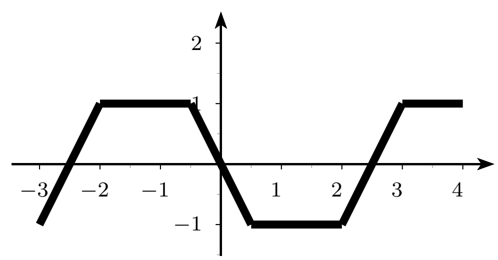
2. Donner une équation différentielle du premier ordre qui admette $f(t) = e^{-2t}$ comme solution.
3. Résoudre en fonction de U, R et L l'équation : $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U$ avec $i(0) = 0$.
4. Résoudre l'équation : $ty'(t) + 2y(t) = 0$.

Exercice 2 ***(20 minutes)***

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = \frac{2}{(t-1)(t-2)}$

   (b) $g(t) = \cos^2(4t) - \sin^2(4t)$

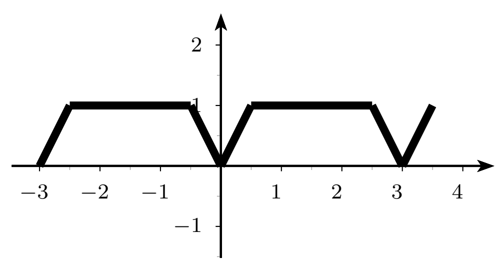
   (c) 

2. Déterminer les périodes des fonctions suivantes :

   (a) $f(t) = \cos(6\pi t + \pi)$

   (b) $g(t) = \sin(8t + \frac{\pi}{3}) + \sin(12t)$

   (c) $h(t) = h_2(\frac{t}{2})$ sachant que la fonction h_2 est $2-$périodique.

   (d) 

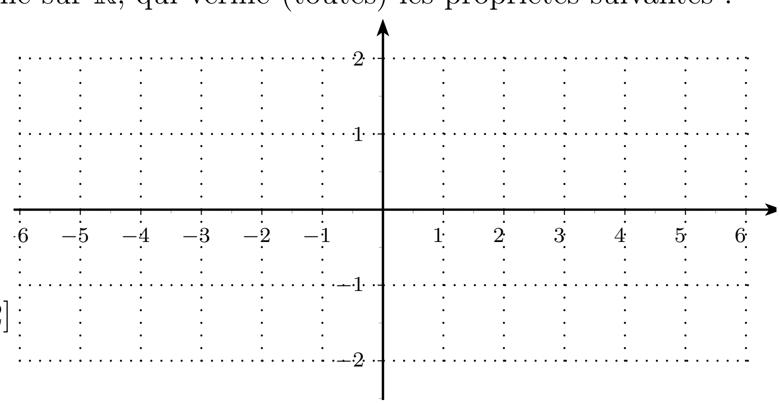
3. Tracer sur $[-6, 6]$ la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie (toutes) les propriétés suivantes :

   (a) f est impaire

   (b) f est de période 4

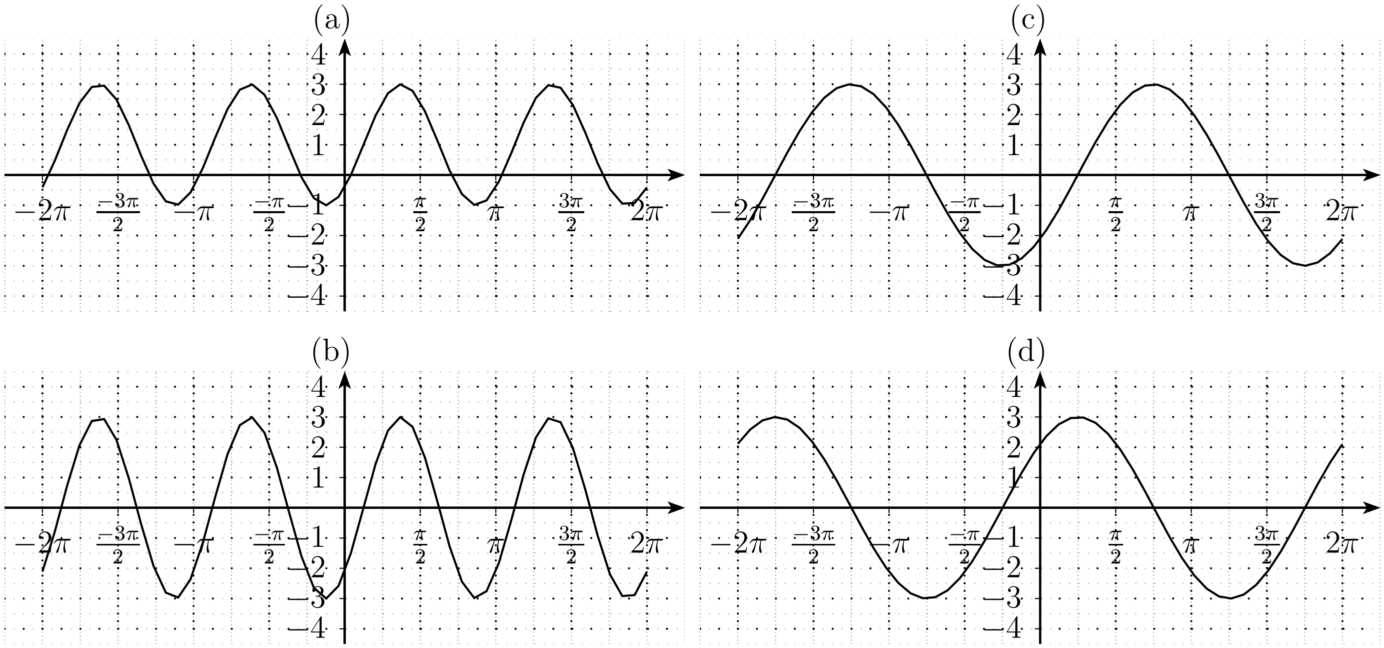
   (c) sur $[0, 2]$ on a

   $$f(t) = \begin{cases} 2t \quad \text{si} \quad t \in [0, 0.5] \\ -\frac{2}{3}t + \frac{4}{3} \quad \text{si} \quad t \in [0.5, 2] \end{cases}$$



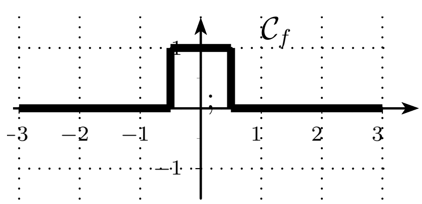
Exercice 3 ***(10 minutes)*** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -\frac{3}{\sqrt{2}}\cos(2t) + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(2t)$.

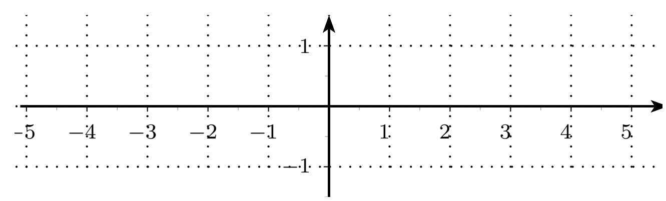
1. Écrire f sous la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$.
2. Déterminer la périodicité et l'amplitude de la fonction f.
3. Parmi les courbes suivantes, indiquer en justifiant votre réponse, celle qui correspond à la courbe représentative de f.



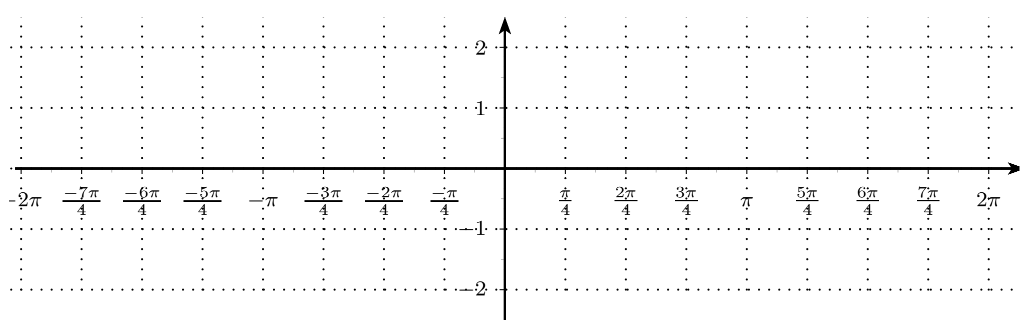
Exercice 4 ***(10 minutes)***

1. La fonction créneau unité f est représentée ci-dessous. Après avoir expliqué votre démarche, tracer sur le graphique ci- dessous la courbe représentative de la fonction $f_1(t) = f(\frac{1}{2}t + 2)$





2. Après avoir expliqué votre démarche, tracer sur le graphique ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f_2(t) = -\sin(t - \frac{\pi}{4}) + 1$



Exercice 5 ***(15 minutes)*** Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $z_1 = (3 + 5i) - (2 - 3i)$
2. $z_2 = \overline{(2 - i)(2i + 1)}$
3. $z_3 = \frac{2-6i}{1+4i}$
4. $z_4 = (1 - 3i)(3 + 2i)(4 - i)$