Nom : Prénom : Groupe :

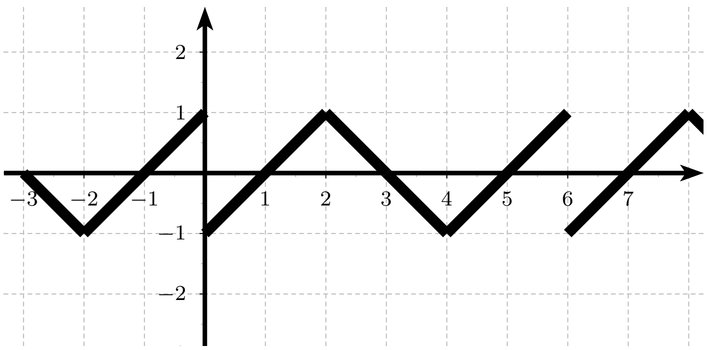
Mathématiques - Devoir Surveillé 3 - Correction
Vendredi 13 décembre 2019 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

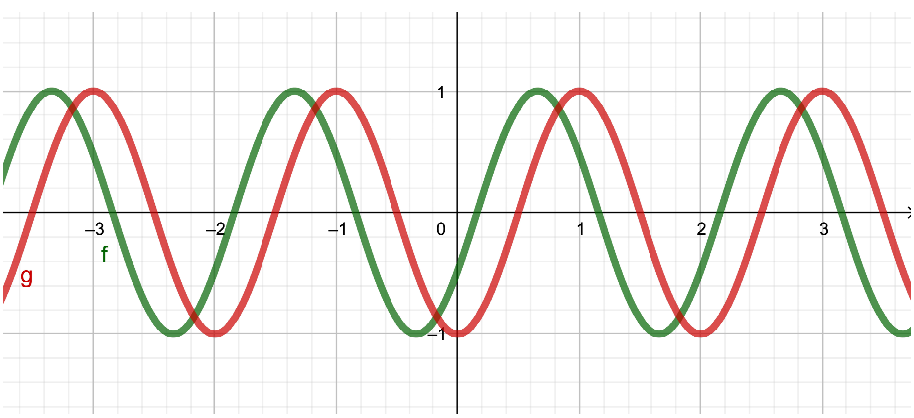
Exercice 1 On considère la fonction f représentée sur l'intervalle $]0,3]$ sur le graphique ci-dessous. Complétez le graphique sur l'intervalle $[-3,8]$ sachant que

1. f est impaire. On peut donc faire une symétrie par rapport à l'origine. On obtient ainsi la courbe sur l'intervalle $[-3,3]$
2. f est périodique de période 6. On répète le « motif » et on obtient :



Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Sur le graphique ci-dessous, quelle courbe représente la fonction $t \mapsto \sin\left(\pi t - \frac{1}{2}\right)$?



   méthode 1 : On remplace t par 0 :
   $\sin\left(\pi \times 0 - \frac{1}{2}\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -1$. Par élimination, la courbe est donc celle de la fonction f.
   méthode 2 : On a $\sin\left(\pi t - \frac{1}{2}\right) = \sin\left(\pi(t - \frac{1}{2\pi})\right)$.
   Le déphasage observé sur le graphique doit donc être un retard de $\frac{1}{2\pi} \simeq 0,16$. Cela confirme que ce n'est pas la courbe g.

2. Déterminer la période des fonctions suivantes :

(a) $f_1(t) = -2\cos(t) + 1$ est de période 2π.
En effet, le changement d'amplitude et l'offset ne modifie pas la période du cosinus.

(b) $f_2(t) = |sin(t)|$ est de période π. Preuve :

$$\begin{aligned} f_2(t+\pi) &= |sin(t+\pi)| \\ &= |-sin(t)| \\ &= |sin(t)| \\ &= f_2(t) \end{aligned}$$

3. La fonction f est une fonction T périodique. Déterminer, en fonction de T, la période de la fonction g définie par

$$g(t) = 5f\left(\frac{1}{4}t\right) - f\left(\frac{1}{6}t + 1\right)$$

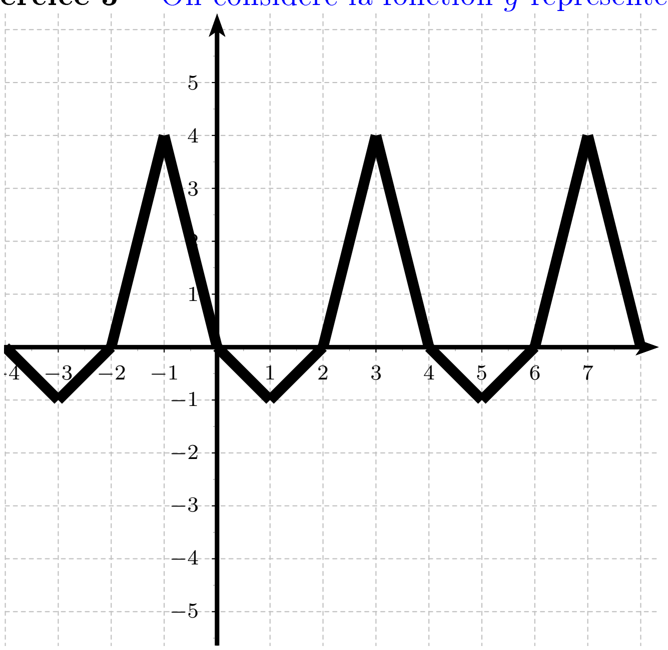
La période de $5f\left(\frac{1}{4}t\right)$ est $T_1 = \dfrac{T}{\frac{1}{4}} = 4T$ et la période de $f\left(\frac{1}{6}t+1\right)$ est $T_2 = \dfrac{T}{\frac{1}{6}} = 6T$.
Donc la période de g est $T_g = ppcm(T_1, T_2) = 12T$.

4. Déterminer la période, l'amplitude et le déphasage par rapport au sinus de la fonction.

$$f_3(t) = \sqrt{3}\cos(4t) - \sin(4t)$$

La pulsation de f_3 est 4, donc la période est $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.
On pose $a = -1$ et $b = \sqrt{3}$. L'amplitude de f_3 est alors $A = \sqrt{a^2+b^2} = 2$.
On note enfin ϕ le déphasage de f_3. On a $\cos(\phi) = \frac{a}{A}$ et $\sin(\phi) = \frac{b}{A}$. Par identification on obtient que le déphasage de f_3 est $\phi = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 3 On considère la fonction g représentée sur le graphique ci-dessous.

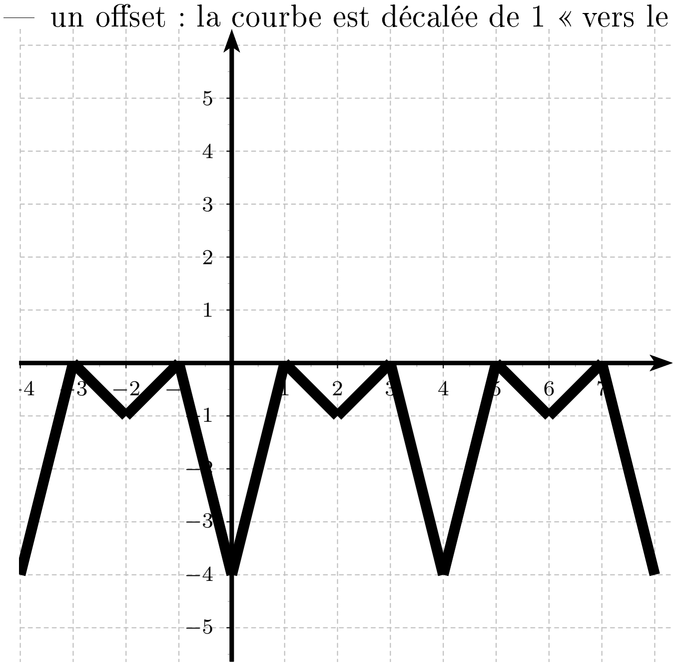


1. Déterminer la parité et la périodicité de la fonction g.
   La fonction g n'est ni paire ni impaire.
   En effet, $g(-1) = 4$ et $g(1) = -1$ donc $g(-1) \neq g(1)$ et $g(-1) \neq -g(1)$.
   La période de g est 4.

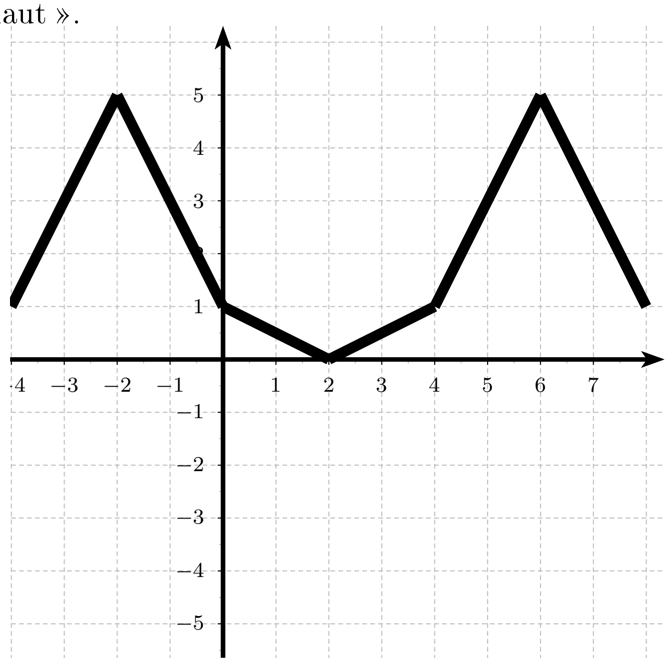
2. Tracer sur les graphiques ci-dessous les courbes des fonctions

$$h(t) = -|g(t-1)| \quad \text{et} \quad k(t) = g\left(\frac{t}{2}\right) + 1$$

Pour obtenir la courbe de h on applique successivement :
— un retard de 1 :décalage de la courbe de 1 « vers ladroite ».
— un redressement : les valeur négatives passent en positives.
— une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
Pour obtenir la courbe de k on applique successivement :
— un changement de fréquence : la période est 2 fois plus longue
— un offset : la courbe est décalée de 1 « vers le haut ».



Courbe de h



Courbe de k

Exercice 4

1. Déterminer le module de :
   (a) $Z_1 = \dfrac{1-7i}{3+i}$.

$$\begin{aligned} |Z_1| &= \frac{|1-7i|}{|3+i|} \\ &= \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

(b) $Z_2 = (2-i)^3$

$$\begin{aligned} |Z_2| &= |(2-i)^3| \\ &= |(2-i)|^3 \\ &= \sqrt{5}^3 \\ &= 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

(c) $Z_3 = 17e^{i\frac{\pi}{8}} \times 3e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\begin{aligned} |Z_3| &= |17e^{i\frac{\pi}{8}}| \times |3e^{i\frac{\pi}{4}}| \\ &= 17 \times 3 \\ &= 51 \end{aligned}$$

2. Déterminer l'argument de :

(a) $Z_4 = -2i(i-\sqrt{3})$

$$\begin{aligned} arg(Z_4) &= arg(-2i) + arg(i-\sqrt{3}) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

(b) $Z_5 = \dfrac{-3e^{i\frac{\pi}{6}}}{5e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$$\begin{aligned} arg(Z_5) &= arg(-3e^{i\frac{\pi}{6}}) - arg(5e^{i\frac{\pi}{4}}) \\ &= arg(-3) + arg(e^{i\frac{\pi}{6}}) - arg(5e^{i\frac{\pi}{4}}) \\ &= \pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{11\pi}{12} \end{aligned}$$

(c) $Z_6 = \dfrac{-R}{-1+i}$ avec $R \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} arg(Z_5) &= arg(-R) - arg(-1+i) \\ &= \pi - \frac{3\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

3. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de

$$\begin{aligned} Z_7 &= \left(e^{i\pi} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} + 2e^{-2i\pi}\right) \\ &= (-1+i)(-i+2) \\ &= -1+3i \end{aligned}$$

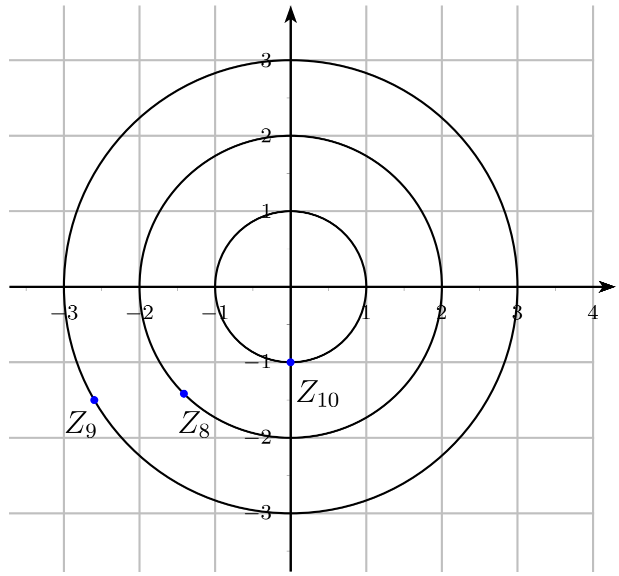
Donc : $Re(Z_7) = -1$ et $Im(Z_7) = 3$.

4. Placer précisément les points d'affixe Z_8, Z_9 et Z_{10}

(a) $Z_9 = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$

(b) $Z_8 = -2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

(c) $Z_{10} = \dfrac{1}{i} = -i$



5. Linéariser, en utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\sin(3t)\sin(5t) &= \frac{e^{3ti}-e^{-3ti}}{2i} \times \frac{e^{5ti}-e^{-5ti}}{2i} \\
&= \frac{e^{8ti}-e^{-2ti}+e^{-8ti}-e^{2ti}}{-4} \\
&= \frac{e^{8ti}+e^{-8ti}}{-4} + \frac{-e^{-2ti}-e^{2ti}}{-4} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{e^{8ti}+e^{-8ti}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{-2ti}+e^{2ti}}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\cos(8t) + \frac{1}{2}\cos(2t)
\end{aligned}$$

Exercice 5

1. Vérifier que i est solution de l'équation suivante :

$$2iZ^2 + (1-i)Z + (i-1) = 0$$

Il suffit de remplacer i dans l'équation :

$$2i \times i^2 + (1-i) \times i + (i-1) = -2i + i + 1 + i - 1 = 0$$

Donc i est bien solution.

2. Résoudre les équations suivantes :

(a) $Z^2 + 2Z + 37 = 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = -144$. Donc les solutions sont

$$Z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{144}}{2} = -1 - 6i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-2 + i\sqrt{144}}{2} = -1 + 6i$$

(b) $2iZ^2 + (1-i)Z + (i-1) = 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = (1-i)^2 - 4 \times 2i \times (i-1) = 8 + 6i$.
On cherche alors la racine carrée de Δ : on pose $(\alpha + i\beta)^2 = 8 + 6i$. Par identification, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = 6 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha^2 = 18 \\ \alpha\beta > 0 \\ 2\beta^2 = 2 \end{array} \right.$$

Donc les racinces carrées du discriminant sont $3+i$ et $-3-i$. Les solutions sont donc

$$Z_1 = \frac{-(1-i)-(3+i)}{4i} = \frac{-4}{4i} = i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-(1-i)+(3+i)}{4i} = \frac{2+2i}{4i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$