Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 3 - Correction
Vendredi 30 novembre 2018 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Sachant que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donner la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
Voir correction du DS2 !

Exercice 2

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

1. $Z_1 = \overline{(1+2i)}(-2-3i) + (3+i)^2$.
   On obtient la forme algébrique en développant :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \overline{(1+2i)}(-2-3i) + (3+i)^2 \\ &= (1-2i)(-2-3i) + (3+i)^2 \\ &= -2-3i+4i-6+9+6i-1 \\ &= 7i \end{aligned}$$

   Comme Z_1 est un imaginaire pur, sa forme exponentielle est : $Z_1 = 7e^{i\frac{\pi}{2}}$

2. $Z_2 = \dfrac{1-i}{-\sqrt{3}+i}$
   On obtient la forme algébrique en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $-\sqrt{3}+i$:

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{1-i}{-\sqrt{3}+i} \times \frac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+i} \\ &= \frac{-\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}-1}{4} \\ &= \frac{-\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

   Pour obtenir la forme exponentielle, on détermine d'abord le module et un argument de Z_2 :

$$|Z_2| = \frac{|1-i|}{|-\sqrt{3}+i|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad arg(Z_2) = arg(1-i) - arg(-\sqrt{3}+i) = -\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{13\pi}{12}$$

   Donc la forme exponentielle est : $Z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\dfrac{13\pi}{12}}$

3. $Z_3 = 2 - e^{i\pi} + 3e^{i\frac{\pi}{2}} + 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$
   On obtient la forme algébrique en utilisant la forme trigonométrique de chaque nombre complexe

écrit sous forme exponentielle :

$$\begin{aligned} Z_3 &= 2 - e^{i\pi} + 3e^{i\frac{\pi}{2}} + 3e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 - (-1) + 3 \times i + 3 \times (-i) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Comme Z_3 est un réel positif, sa forme exponentielle est :$Z_3 = 3e^{i\times 0} = 3$.

4. $Z_4 = \left(5 + 5\sqrt{3}i\right)^3$.
On détermine d'abord la forme exponentielle de :$5 + 5\sqrt{3}i = 5(1 + \sqrt{3}i) = 5 \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit que la forme exponentielle de Z_4 est

$$Z_4 = \left(10e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 1000e^{i\pi}$$

Et donc que la forme algébrique est : $Z_4 = -1000$.

Exercice 3

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Écrire les sommes suivantes avec un signe Sigma :
   (a) $S_1 = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 625 = \sum_{k=1}^{25} k^2$
   (b) $S_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{83} = \sum_{k=1}^{41} \dfrac{1}{2k+1}$
2. On considère la propriété P_n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

   (a) Vérifier que P_1, P_2 et P_3 sont vraies.
   Pour $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{2}$ et $1 - \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$. Donc P_1 est vraie.
   Pour $n = 2$: $\sum_{k=1}^{2} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2(2+1)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $1 - \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{2}{3}$. Donc P_2 est vraie.
   Pour $n = 3$: $\sum_{k=1}^{3} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3(3+1)} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$ et $1 - \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{3}{4}$. Donc P_3 est vraie.

   (b) Démontrer, par récurrence, que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   Initialisation : P_1 est vraie, d'après la question précédente.
   Hérédité : Supposons que P_n : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ soit vraie pour un certain entier n.
   Montrons alors que P_{n+1} : $\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+2}$ est vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-n-1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Conclusion : P_1 est vraie et $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ donc, par récurrence, P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 4

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :

1. Il n'existe pas de nombre complexe z tel que : $\overline{z} = z$. **FAUX** .
   Contre-exemple : $z = 2$.
2. Pour tout complexe z on a $arg(iz) = arg(z) + \pi$. **FAUX** .
   Contre-exemple : $z = 2$: $arg(2i) = \frac{\pi}{2} \neq 0 + \pi$.
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}\ t.q.\ x \times y \geq 1$.**FAUX** .
   Contre-exemple : $x = 0$. Il n'existe pas de $y \in \mathbb{Z}$ tel que $x \times y \geq 1$.
4. $\forall x \in \mathbb{N}$ et $\forall y \in \mathbb{N}$ on a : $x \neq 1$ ou $y \neq 1 \Rightarrow xy \neq 1$.**VRAI** .
   Écrivons la contraposée de la propriété :

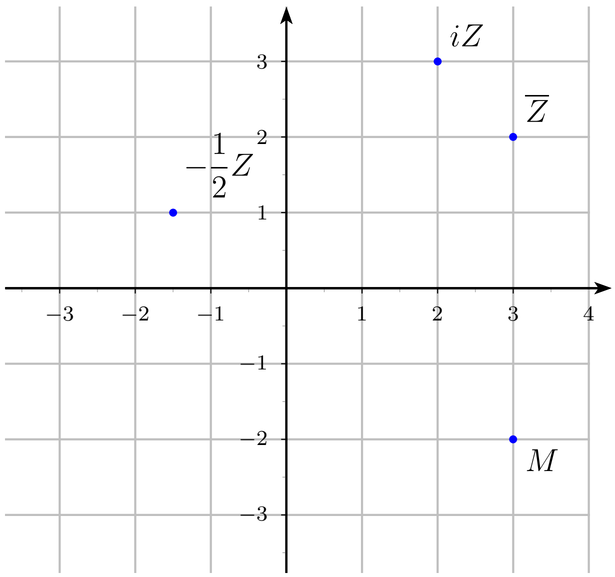
   $$\forall x \in \mathbb{N} \text{ et } \forall y \in \mathbb{N} \text{ on a } xy = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ et } y = 1$$

   Or un produit de nombre entier est égal à 1 implique effectivement que les deux nombres sont égaux à 1. La contraposée est vraie donc la propriété est vraie.

Exercice 5

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Sur le graphique ci-dessous, le point M est le point d'affixe Z. Placer précsément (en justifiant la démarche) les points d'affixe : $\overline{Z}$, $i \times Z$ et $-\dfrac{1}{2} \times Z$.



Le point d'affixe $\overline{Z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
Le point d'affixe iZ s'obtient en faisant une rotation de centre O et de 90°. En effet, le module de iZ est le même que celui de Z et l'argument de iZ est celui de Z plus $\frac{\pi}{2}$.
Le point d'affixe $-\dfrac{1}{2}Z$ est le point d'affixe $-\frac{3}{2} + i$ (car $Z = 3 - 2i$).

2. Linéariser, en utilisant les formules d'Euler, la fonction $f(t) = \sin(2t)\sin(3t)$.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin(2t)\sin(3t) \\
&= \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} \times \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} \\
&= \frac{e^{5it} - e^{-it} + e^{-5it} - e^{it}}{-4} \\
&= \frac{e^{5it} + e^{-5it}}{-4} + \frac{-e^{-it} - e^{it}}{-4} \\
&= \frac{-1}{2}\frac{e^{5it} + e^{-5it}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{-it} + e^{it}}{2} \\
&= \frac{-1}{2}\cos(5t) + \frac{1}{2}\cos(t)
\end{aligned}$$

3. Donner la forme algébrique de Z_6, sachant que $\mathcal{I}m(Z_6) = -3$ et que $arg(Z_6) = -\dfrac{3\pi}{4}$.
Le seul nombre complexe qui satisfait les 2 propriétés est $Z_6 = -3 - 3i$.