Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 30 novembre 2018 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Sachant que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donner la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

1. $Z_1 = \overline{(1+2i)}(-2-3i) + (3+i)^2$
2. $Z_2 = \dfrac{1-i}{-\sqrt{3}+i}$
3. $Z_3 = 2 - e^{i\pi} + 3e^{i\frac{\pi}{2}} + 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$
4. $Z_4 = \left(5 + 5\sqrt{3}i\right)^3$

Exercice 3

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Écrire les sommes suivantes avec un signe Sigma :
   (a) $S_1 = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 625$ (indication : $\sqrt{625} = 25$)
   (b) $S_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{83}$
2. On considère la propriété P_n :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
   (a) Vérifier que P_1, P_2 et P_3 sont vraies.
   (b) Démontrer, par récurrence, que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 4

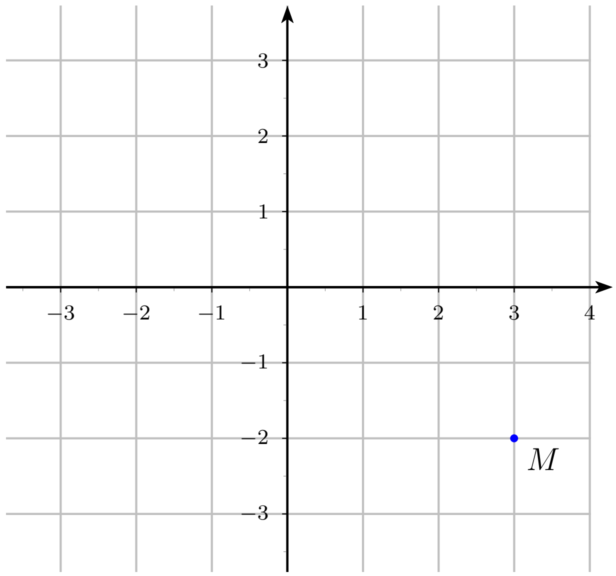
Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :

1. Il n'existe pas de nombre complexe z tel que : $\overline{z} = z$
2. Pour tout complexe z on a $arg(iz) = arg(z) + \pi$
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}$ $t.q.$ $x \times y \geq 1$
4. $\forall x \in \mathbb{N}$ et $\forall y \in \mathbb{N}$ on a : $x \neq 1$ ou $y \neq 1 \Rightarrow xy \neq 1$

Exercice 5

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Sur le graphique ci-dessous, le point M est le point d'affixe Z. Placer précsément (en justifiant la démarche) les points d'affixe : $\overline{Z}$, $i \times Z$ et $-\dfrac{1}{2} \times Z$.



2. Linéariser, en utilisant les formules d'Euler, la fonction $f(t) = \sin(2t)\sin(3t)$.
3. Donner la forme algébrique de Z_6, sachant que $\mathcal{I}m(Z_6) = -3$ et que $arg(Z_6) = -\dfrac{3\pi}{4}$.