Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 3
Vendredi 1er décembre 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la propriété P_n

$$P_n : \sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

1. Les propriétés P_2 et P_3 sont elles vraies ?

   Pour $n=2$ on a

   $$\sum_{k=0}^{2} 3^k = 3^0+3^1+3^2 = 13 \qquad \text{et} \qquad \frac{3^{2+1}-1}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

   Donc P_2 est vraie.

   Pour $n=3$ on a

   $$\sum_{k=0}^{3} 3^k = 3^0+3^1+3^2+3^3 = 40 \qquad \text{et} \qquad \frac{3^{3+1}-1}{2} = \frac{81-1}{2} = 40$$

   Donc P_3 est vraie.

2. Montrer, par récurrence, que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

   <u>Initialisation :</u> Pour $n=0$ on a

   $$\sum_{k=0}^{0} 3^k = 3^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{3^{0+1}-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

   Donc P_0 est vraie.

   <u>Hérédité :</u>

   Supposons que P_n soit vraie pour un certain n et montrons que $P_{n+1} : \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \dfrac{3^{n+2}-1}{2}$ est vraie .

   On utilise la propriété P_n pour passer de la ligne (1) à la ligne (2) :

   $$\begin{aligned}
   \sum_{k=0}^{n+1} 3^k &= \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} && (1)\\
   &= \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1} && (2)\\
   &= \frac{3^{n+1}-1+2\times 3^{n+1}}{2} && (3)\\
   &= \frac{3\times 3^{n+1}-1}{2} && (4)\\
   &= \frac{3^{n+2}-1}{2} && (5)
   \end{aligned}$$

Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Vrai ou Faux : Pour tout nombre complexe Z, module de Z est toujours supérieur ou égal à la partie réelle de Z.
   Vrai. En effet, quelque soit a et b réels
   $$a^2+b^2 \geq a^2$$
   Donc
   $$\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2}$$
   Et donc module de $a+ib$ est toujours supérieur ou égal à $|a|$ et donc à a.
2. Donner un exemple de nombre complexe Z qui vérifie simultanément les 4 propriétés suivantes :
   $$|Z|<2, \qquad Re(Z)>1, \qquad Im(Z)<1, \qquad arg(Z) \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$$
   Posons $Z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$. On a bien $Re(Z)=\frac{3}{2}>1$ et $Im(z)=-\frac{1}{2}<1$.
   De plus, $|Z|=\sqrt{\frac{9}{4}+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{10}/2<2$ et $arg(Z)\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ car $Re(Z)>0$ et $Im(Z)<0$.
   Donc $Z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$ répond bien à la question.
3. Linéariser l'expression $f(x)=\sin(4x)\cos(3x)$.
   On utilise les formules d'Euler :
   $$\begin{aligned}\sin(4x)\cos(3x) &= \frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{2i}\times\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\\ &= \frac{e^{7ix}+e^{ix}-e^{-ix}-e^{-7ix}}{4i}\\ &= \frac{e^{7ix}-e^{-7ix}}{4i}+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{4i}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{e^{7ix}-e^{-7ix}}{2i}+\frac{1}{2}\times\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\\ &= \frac{1}{2}\sin(7x)+\frac{1}{2}\sin(x)\end{aligned}$$
4. Déterminer pour chaque Z sa partie réelle, sa partie imaginaire, son module et un argument :
   (a) $Z_1=\left(e^{\frac{i\pi}{12}}-e^{\frac{7i\pi}{12}}\right)\left(e^{-\frac{i\pi}{12}}+e^{\frac{5i\pi}{12}}\right)$
   On a
   $$Z_1=e^{\frac{i\pi}{12}}\times e^{-\frac{i\pi}{12}}+e^{\frac{i\pi}{12}}\times e^{\frac{5i\pi}{12}}-e^{\frac{7i\pi}{12}}\times e^{-\frac{i\pi}{12}}-e^{\frac{7i\pi}{12}}e^{\frac{5i\pi}{12}}$$
   Donc
   $$Z_1=1+e^{-\frac{i\pi}{2}}-e^{-\frac{i\pi}{2}}-e^{-i\pi}=1-(-1)=2$$
   Et donc
   $$Re(Z_1)=2 \qquad Im(Z_1)=0 \qquad |Z_1|=2 \qquad arg(Z_1)=0$$
   (b) $Z_2=\dfrac{1-i}{1+i}$
   On a
   $$Z_2=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{1-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i$$
   Et donc
   $$Re(Z_2)=0 \qquad Im(Z_2)=-1 \qquad |Z_2|=1 \qquad arg(Z_2)=-\frac{\pi}{2}$$

(c) $Z_3 = (1+i\sqrt{3})^{11}$
On a $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ donc $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc

$$Z_3 = (1+i\sqrt{3})^{11} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{11} = 2^{11}e^{i\frac{11\pi}{3}}$$

Donc

$$|Z_3| = 2^{11} = 2048 \qquad arg(Z_3) = \frac{11\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

De plus

$$Z_3 = 2^{11}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2048\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Et donc

$$Re(Z_3) = 1024 \qquad Im(Z_3) = -1024\sqrt{3}$$

Exercice 3 On considère l'équation

$$z^2 + z + 3iz + 2i - 2 = 0$$

1. Le nombre complexe $z = 1 + 2i$ est il solution ?
   On remplace z par $1 + 2i$:
   $$\begin{aligned} z^2 + z + 3iz + 2i - 2 &= (1+2i)^2 + 1 + 2i + 3i(1+2i) + 2i - 2 \\ &= 1 + 4i - 4 + 1 + 2i + 3i - 6 + 2i - 2 \\ &= -10 + 11i \\ &\neq 0 \end{aligned}$$
   Donc $1 + 2i$ n'est pas solution.
2. Résolvez l'équation.
   On calcule le discriminant :
   $$\Delta = (1+3i)^2 - 4(2i-2) = 1 + 6i - 9 - 8i + 8 = -2i$$
   Δ est complexe ; on cherche donc sa racine carrée complexe : $\delta = \alpha + i\beta$ telle que
   $$(\alpha + i\beta)^2 = -2i \Leftrightarrow \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2 = -2i$$
   On identifie les parties réelle et imaginaire et le module :
   $$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0 \\ 2\alpha\beta = -2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 2 \end{cases}$$
   On résout le système en faisant des combinaisons des lignes 1 et 3 :
   $$\begin{cases} 2\alpha^2 = 2 \\ \alpha\beta = -1 \\ 2\beta^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ ou } -1 \\ \alpha\beta = -1 \\ \beta = 1 \text{ ou } -1 \end{cases}$$
   Le produit $\alpha\beta$ est négatif donc α et β sont de signes contraires ; donc $\delta = 1 - i$ ou $-1 + i$.
   Donc, les solutions de l'équations sont
   $$z_1 = \frac{-(1+3i) - (1-i)}{2} = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i$$
   et
   $$z_2 = \frac{-(1+3i) + (1-i)}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i$$

Exercice 4 Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes

1. Donner (en justifiant !) la période des fonctions suivantes :

   (a) $f_1(x) = -3\cos(12x + \pi) + 5$.

   La pulsation de f_1 est 12. Donc la période de f_1 est $T = \frac{2\pi}{12}) = \frac{\pi}{6}$.

   (b) $f_2(x) = \sin(4x)\cos(3x)$

   On sait que la forme linéarisée de la fonction f_2 est $f_2(x) = \frac{1}{2}\sin(7x) + \frac{1}{2}\sin(x)$.

   f_2 est donc la somme d'une fonction $\frac{2\pi}{7}$-périodique et d'une fonction 2π-périodique.

   La période de f_2 est $T = ppcm\left(\frac{2\pi}{7}, 2\pi\right) = 2\pi$.

2. Montrer que la fonction $f_3(t) = (\cos(2t))^2$ est $\frac{\pi}{2}$-périodique.

   On a

$$\begin{aligned}
f_3\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \left(\cos\left(2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)^2 \\
&= \left(\cos\left(2t - \pi\right)\right)^2 \\
&= \left(-\cos\left(2t\right)\right)^2 \\
&= \left(\cos\left(2t\right)\right)^2 \\
&= f_3(t)
\end{aligned}$$

3. Donner (en justifiant) la parité des fonctions suivantes :

   (a) $f_4(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 1}$

   On a

$$\begin{aligned}
f_4(-x) &= \frac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 + 1} \\
&= \frac{-x^3 + 3x}{x^2 + 1} \\
&= \frac{-(x^3 - 3x)}{x^2 + 1} \\
&= -f_4(x)
\end{aligned}$$

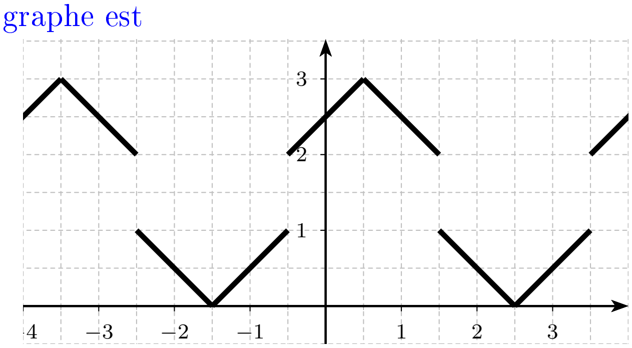
   Donc f_4 est impaire.

   (b) $f_5(x) = \sin(4x)\cos(3x)$

$$\begin{aligned}
f_5(-x) &= \sin(-4x)\cos(-3x) \\
&= -\sin(4x)\cos(3x) \\
&= -f_5(x)
\end{aligned}$$

   Donc f_5 est impaire.

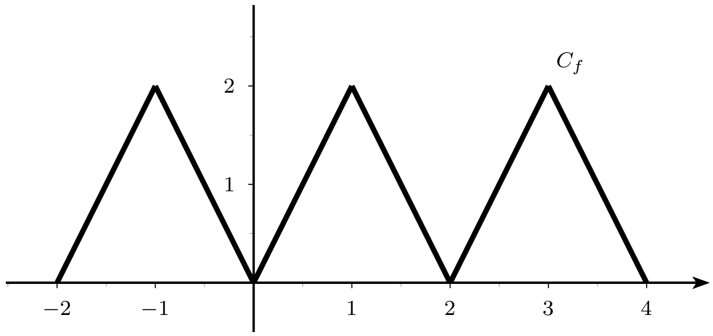
   (c) f_6 est la fonction dont le graphe est



La courbe représentative de f_6 n'est ni symétrique par rapport à l'origine ni symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc la fonction n'est ni paire ni impaire.

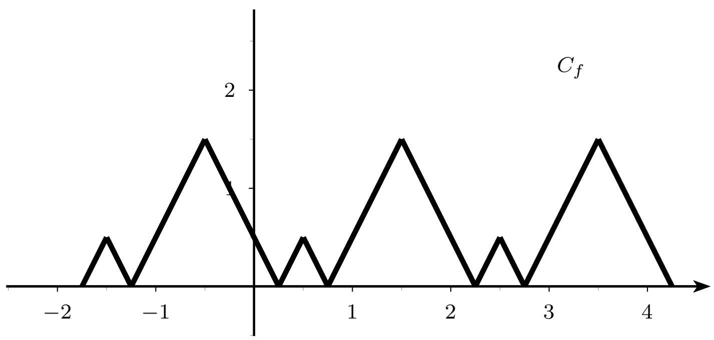
Exercice 5 Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soient la fonction périodique f dont la courbe représentative est :

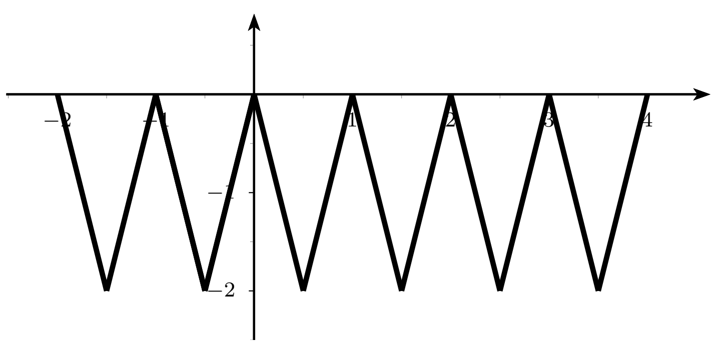


Tracer sur votre copie, le plus précisément possible, les courbes représentatives des fonctions g, h et k :

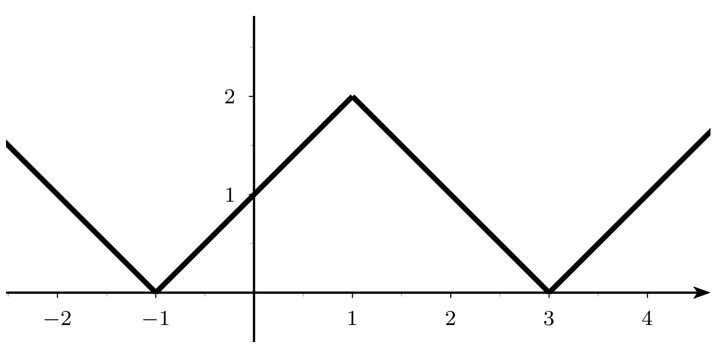
(a) $g(t) = \left|f\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right|$
Le graphe de g est



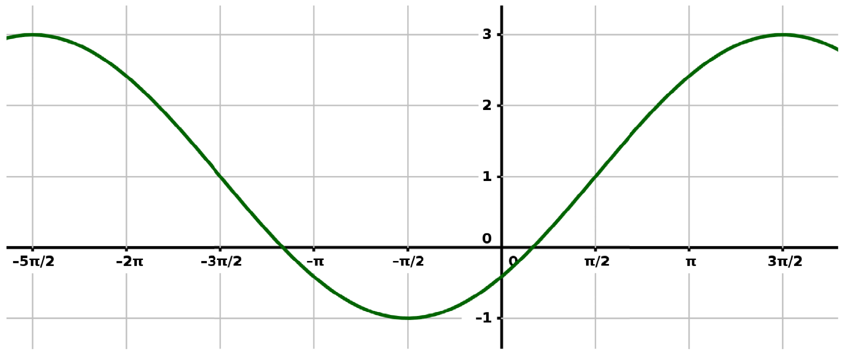
(b) $h(t) = -f(2t)$
Le graphe de h est



(c) $k(t) = f\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)$
Le graphe de k est



2. Sur le graphique ci-dessous nous avons tyracer la courbe de la fonction $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + C$.



(a) Donner les noms utilisés en génie électrique pour les 4 constantes : A, ω, φ et C.
A est l'amplitude de f, ω sa pulsation, φ le déphasage par rapport au sinus et C l'offset.

(b) Déterminer, en justifiant la démarche, les valeurs de A, ω, φ et C.
L'amplitude crête à crête est 4, donc $A = 2$.
La valeur moyenne vaut 1 donc $C = 1$.
La période de f est 4π donc $\omega = \dfrac{1}{2}$.
La courbe admet le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ comme centre de symétrie donc $\Delta t = -\pi$.
Donc $\varphi = \omega \Delta t = -\frac{pi}{4}$ et

$$f(t) = 2\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

(c) Vérifier votre résultat en calculant $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ avec la fonction que vous avez obtenue à la question 2.
On utlise l'expression obetnue ci-dessus :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\sin(0) + 1 = 1$$

Et

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 3$$

Ce qui est cohérent avec la courbe de f.