

Nom :

Prénom :

Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 3

Vendredi 1er décembre 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la propriété P_n

$$P_n : \sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

1. Les propriétés P_2 et P_3 sont elles vraies ?
2. Montrer, par récurrence, que P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Vrai ou Faux : Pour tout nombre complexe Z , module de Z est toujours supérieur ou égal à la partie réelle de Z .
2. Donner un exemple de nombre complexe Z qui vérifie simultanément les 4 propriétés suivantes :

$$|Z| < 2, \quad \operatorname{Re}(Z) > 1, \quad \operatorname{Im}(Z) < 1, \quad \arg(Z) \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$$

3. Linéariser l'expression $f(x) = \sin(4x) \cos(3x)$.
4. Déterminer pour chaque Z sa partie réelle, sa partie imaginaire, son module et un argument :

(a) $Z_1 = \left(e^{\frac{i\pi}{12}} - e^{\frac{7i\pi}{12}}\right) \left(e^{-\frac{i\pi}{12}} + e^{\frac{5i\pi}{12}}\right)$

(b) $Z_2 = \frac{1-i}{1+i}$

(c) $Z_3 = (1 + i\sqrt{3})^{11}$

Exercice 3 On considère l'équation

$$z^2 + z + 3iz + 2i - 2 = 0$$

1. Le nombre complexe $z = 1 + 2i$ est il solution ?
2. Résolvez l'équation.

Exercice 4 Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes

1. Donner (en justifiant !) la période des fonctions suivantes :
 - (a) $f_1(x) = -3 \cos(12x + \pi) + 5$

(b) $f_2(x) = \sin(4x) \cos(3x)$

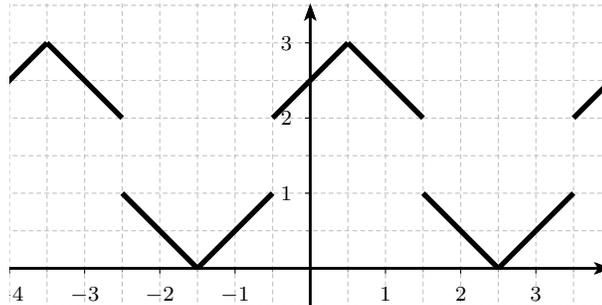
2. Montrer que la fonction $f_3(t) = (\cos(2t))^2$ est $\frac{\pi}{2}$ -périodique.

3. Donner (en justifiant) la parité des fonctions suivantes :

(a) $f_4(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 1}$

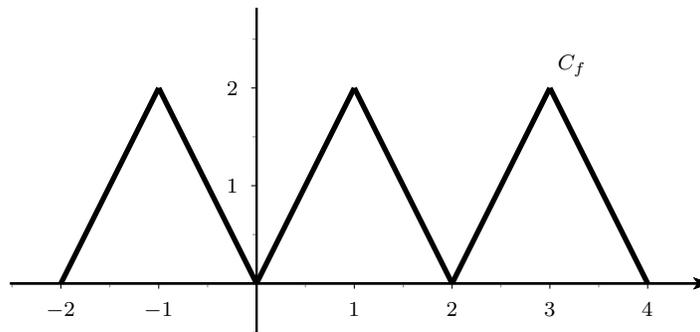
(b) $f_5(x) = \sin(4x) \cos(3x)$

(c) f_6 est la fonction dont le graphe est



Exercice 5 Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soient la fonction périodique f dont la courbe représentative est :



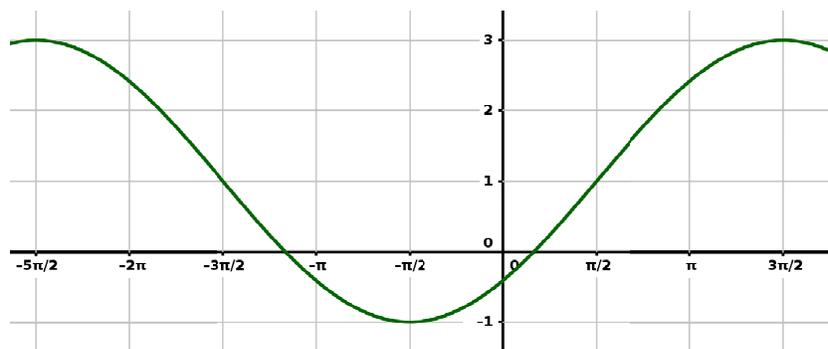
Tracer sur votre copie, le plus précisément possible, les courbes représentatives des fonctions g , h et k :

(a) $g(t) = |f(t - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}|$

(b) $h(t) = -f(2t)$

(c) $k(t) = f(t + \frac{1}{2})$

2. Sur le graphique ci-dessous nous avons tracé la courbe de la fonction $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + C$.



(a) Donner les noms utilisés en génie électrique pour les 4 constantes : A , ω , φ et C .

(b) Déterminer, en justifiant la démarche, les valeurs de A , ω , φ et C .

(c) Vérifier votre résultat en calculant $f(\frac{\pi}{2})$ et $f(\frac{3\pi}{2})$ avec la fonction que vous avez obtenue à la question 2.