Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2 - Correction
Vendredi 18 novembre 2022 - Durée : 1h15

Tout document et appareil électronique est interdit

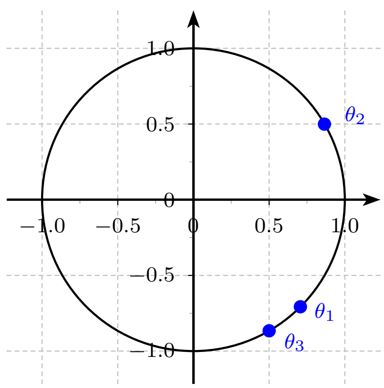
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Donner la mesure principale de chacun des angles.
   On rappelle que la mesure principale d'un angle est la valeur comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et qui lui est égale modulo 2π.

$$\theta_1 = \frac{31\pi}{4} = \frac{32\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 8\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$
$$\theta_2 = \frac{1789\pi}{6} = \frac{1788\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 298\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$
$$\theta_3 = \frac{-19\pi}{3} = \frac{-18\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -6\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

2. Placer sur le cercle trigonométrique les 3 angles de la question précédente :



3. Donner les valeurs (sans justifier) de :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

4. Déterminer les valeurs (sans justifier) de
On rappelle que la fonction arctan ne renvoie que des angles compris dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
On utilise le fait que tangente est π périodique.

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \qquad \arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}-2\pi\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 2

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sin(3t) = \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} & \sin(3t) = \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 3t = t+\frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3t = \pi-(t+\frac{\pi}{3}) \quad [2\pi] \\ \Leftrightarrow\ & 2t = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad 4t = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \\ \Leftrightarrow\ & t = \frac{\pi}{6} \quad [\pi] \quad \text{ou} \quad t = \frac{\pi}{6} \quad \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Les solutions sont donc tous les réels de la forme $\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Donner les solutions de l'équation précédente dans $[0, 2\pi[$.
On fait varier k tant que $\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi[$. k prend donc les valeurs 0,1,2, et 3 :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right\}$$

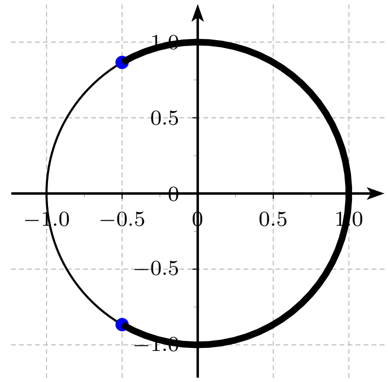
2. Mettre la fonction $f(t) = 2\cos(3t) - 2\sin(3t)$ sous la forme $A\sin(\omega t+\varphi)$
On pose $a = 2$ et $b = -2$.

On a alors $A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. et $\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{b}{A} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{a}{A} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Ainsi

$$f(t) = 2\cos(3t) - 2\sin(3t) = 2\sqrt{2}\sin\left(3t+\frac{3\pi}{4}\right)$$

3. Donner les valeurs de $t \in]-\pi;\pi]$ qui soient solutions de $\cos(t) > -\frac{1}{2}$.
On utilise le cercle trigonométrique pour répondre :



On peut lire que les solutions sont les angles compris dans l'intervalle $\left]-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right[$.

4. Démontrer que $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\cos(a)\neq 0$ et $\cos(b)\neq 0$ on a $\tan(a)+\tan(b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$

$$\tan(a)+\tan(b)=\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}$$

On remet au même dénominateur

$$\tan(a)+\tan(b)=\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}+\frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(b)\cos(a)}=\frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(b)\cos(a)}$$

Or $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$, donc on a bien

$$\tan(a)+\tan(b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. La fonction $f(t)=t\cos(t)$ est-elle solution de l'équation différentielle suivante ?

$$-y'(t)+\frac{1}{t}y(t)=t\sin(t)$$

On calcule la dériviée de f : $f'(t)=1\times\cos(t)+t\times(-\sin(t))$.
On a alors

$$-f'(t)+\frac{1}{t}f(t)=-\cos(t)+t\sin(t)+\frac{1}{t}\times t\cos(t)=-\cos(t)+t\sin(t)+\cos(t)=t\sin(t)$$

Donc f est bien solution.

2. Donner une équation différentielle, linéaire, d'ordre 1, à coefficients constants, **homogène** telle que la fonction $f(t)=e^{-\frac{t}{3}}$ soit solution.
On peut identifier la constante de temps $\tau=3$. On en déduit que f est solution de l'équation homogène suivante

$$\tau y'(t)+y(t)=0\Leftrightarrow 3y'(t)+y(t)=0$$

3. Donner une équation différentielle, linéaire, d'ordre 1, telle que la fonction $f(t)=t^3-3t+4$ soit solution.
On calcule la dérivée de f : $f'(t)=3t^2-3$.
On a alors $f'(t)+f(t)=t^3+3t^2-3t+1$.
Donc f est solution, par exemple, de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t)+y(t)=t^3+3t^2-3t+1$$

Exercice 4

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} 5y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

L'équation est une équation homogène de la forme $ay'(t) + by(t) = 0$. Ses solutions sont donc les fonctions de la forme

$$y(t) = Ce^{-\frac{b}{a}t} = Ce^{-\frac{2}{5}t} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

On calcule C grâce à la condition initiale :

$$y(0) = 3 \Rightarrow Ce^0 = 3 \Rightarrow k = 3$$

La solution est donc la fonction $y(t) = 3e^{-\frac{2}{5}t}$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} 5y'(t) + 2y(t) = 2t^2 + 5 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

étape 1 : On résout l'équation homogène : $5y'(t) + 2y(t) = 0$
Les solutions sont $y_H(t) = Ce^{-\frac{2}{5}t} \quad \forall C \in \mathbb{R}$

étape 2 : On cherche une solution particulière.
On pose $y_p(t) = at^2 + bt + c$ Alors $y_p'(t) = 2at + b$ On veut que y_p soit solution de l'équation donc

$$5(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) = 2t^2 5$$

On en déduit que

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 10a + 2b = 0 \\ 5b + 2c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 15 \end{cases}$$

Donc $y_p(t) = t^2 - 5t + 15$.

étape 3 : Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = Ce^{-\frac{2}{5}t} + t^2 - 5t + 15 \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

étape 4 : On calcule C grâce à la condition initiale :

$$y(0) = 3 \Rightarrow Ce^0 + 15 = 3 \Rightarrow C = -12$$

Conclusion : la solution est la fonction

$$y(t) = -12e^{-\frac{2}{5}t} + t^2 - 5t + 15$$