Mathématiques - Devoir Surveillé 1 - Correction
Vendredi 19 novembre 2021 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 *(15 minutes)*

Répondre par **Vrai** ou **Faux** en justifiant (toute réponse non justifiée ne rapporte rien).

1. $\dfrac{2-2^{-2}}{2+2^{-2}} = \dfrac{7}{9}$

$$\begin{aligned}\frac{2-2^{-2}}{2+2^{-2}} &= \frac{2-\frac{1}{2^2}}{2+\frac{1}{2^2}}\\ &= \frac{2-\frac{1}{4}}{2+\frac{1}{4}}\\ &= \frac{\frac{7}{4}}{\frac{9}{4}}\\ &= \frac{7}{4}\times\frac{4}{9}\\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

   Donc VRAI !

2. Si $\sqrt{50}-\sqrt{8}=\sqrt{x}$ alors $x=18$

$$\begin{aligned}\sqrt{50}-\sqrt{8} &= \sqrt{25\times 2}-\sqrt{4\times 2}\\ &= 5\sqrt{2}-2\sqrt{2}\\ &= 3\sqrt{2}\\ &= \sqrt{3^2\times 2}\\ &= \sqrt{18}\end{aligned}$$

   Donc VRAI

3. Soient a et b deux réels. Si $a\neq 0$ et $a+b=0$ alors $\dfrac{b^{2021}}{a^{2021}}=1$

   Si $a+b=0$ alors $a=-b$ et donc $\dfrac{b^{2021}}{a^{2021}}=\dfrac{b^{2021}}{(-b)^{2021}}=\left(\dfrac{b}{-b}\right)^{2021}=(-1)^{2021}=-1$. Donc FAUX.

4. Soient a et b deux réels. $ab\leq 0 \Rightarrow a\leq 0$ et $b\geq 0$.
   Contre exemple : $a=2$ et $b=-3$. On a bien $ab\leq 0$ et pourtant $a\geq 0$ et $b\leq 0$. Donc FAUX.

Exercice 2 *(15 minutes)*

1. Soit la propriété $P_1 : \forall x\in\mathbb{R}, \exists b\in\mathbb{N}$ tel que $x^2>b$.

   (a) Dire si la propriété P_1 est vraie ou fausse.
   Prenons $x=0$ alors il n'existe pas d'entier naturel b tel que $0>b$.
   Donc $x=0$ est un contre exemple pour P_1.
   Donc P_1 est fausse.

(b) Écrire la négation de P_1.
$Non - P_1 : \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall b \in \mathbb{N},\ x^2 \leq b$.

(c) La propriété non-P_1 est-elle vraie ou fausse ?
Puisque P_1 est fausse, $non - P_1$ est nécessairement vraie.

2. Dire si la propriété P_2 est vraie ou fausse :

$$P_2 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists z \in [0; +\infty[\text{ tel que } (x + y)^2 = x^2 + y^2 + z$$

Prenons $x = -1$ et $y = 1$. Alors $(x + y)^2 = 0^2 = 0$. Il n'est alors pas possible de trouver un z positif tel que $0 = x^2 + y^2 + z$.
Donc P_2 est fausse.

3. Donner un exemple de fonction qui vérifie la propriété $P_3 : \exists m \in [0; +\infty[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > m$
Une fonction f qui vérifie la prorpriété P_3 est une fonction minorée.
On peut, par exemple, prendre : $f(x) = x^2$, qui est monirée par 0.

Exercice 3 ***(10 minutes)***

1. Écrire les sommes suivantes en utilisant le signe Sigma :

(a) $S_1 = 16 + 25 + 36 + \ldots + 400 \ = \displaystyle\sum_{k=4}^{20} k^2$

(b) $S_2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{8} + \ldots + \dfrac{31}{32} = \displaystyle\sum_{k=1}^{15} \dfrac{2k+1}{2k+2}$

(c) $S_3 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \ldots + 171 - 172 + 173 = \displaystyle\sum_{k=1}^{173} -k \times (-1)^k$

2. Donner la valeur exacte des deux sommes suivantes :

(a) $S_4 = \displaystyle\sum_{k=2}^{5} k \times (k+1) = 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 = 6 + 12 + 20 + 30 = 68$

(b) $S_5 = \displaystyle\sum_{n=0}^{12} 17 = 17 \times 13 = 221$

Exercice 4 ***(10 minutes)***

1. Donner la mesure principale de chacun des angles suivants

(a) $\theta_1 = \dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{12\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

(b) $\theta_2 = \dfrac{31\pi}{2} = \dfrac{32\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 16\pi - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

(c) $\theta_3 = -\dfrac{49\pi}{17} = -\dfrac{34\pi}{17} - \dfrac{15\pi}{17} = -\dfrac{15\pi}{17}\ [2\pi]$

(d) $\theta_4 = \dfrac{2677\pi}{4} = \dfrac{2000\pi}{4} + \dfrac{600\pi}{4} + \dfrac{80\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} = 500\pi + 150\pi + 20\pi - \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

2. Donner les valeurs de

(a) $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

(b) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{\pi}{6}$

(c) $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$

(d) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(e) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 5 ***(25 minutes)***

1. Donner la liste des réels $x \in]-\pi;\pi]$ qui vérifie $x = \frac{5\pi}{6} + k \times \frac{\pi}{3}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

   Comme $\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} > \pi$, il faut nécessairement prendre des valeurs de k négatives ou nulle. On prend $k = 0, -1, -2, -3, -4, -5$ et on obtient les angles :

$$S = \left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{3\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\} = \left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\}$$

2. Résoudre sur $[0;2\pi[$ l'équation $\sin(3x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sin(3x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad 3x = x + \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } 3x = \pi - (x + \frac{\pi}{2})[2\pi] \\
& \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } 4x = \pi - \frac{\pi}{2}[2\pi] \\
& \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}[\pi] \text{ ou } x = \frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

   Donc les solutions sur $[0;2\pi[$ sont

$$S = \left\{\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{5\pi}{4}; \frac{13\pi}{8}\right\}$$

3. Résoudre sur $[0;2\pi[$ l'équation $\sin(2x) = \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
\sin(2x) = \cos(x) \quad & \Leftrightarrow \quad 2\sin(x)\cos(x) = \cos(x) \\
& \Leftrightarrow \quad 2\sin(x)\cos(x) - \cos(x) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (2\sin(x) - 1)\cos(x) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 2\sin(x) - 1 = 0 \text{ ou } \cos(x) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ ou } \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2}[2\pi]
\end{aligned}$$

   Donc les solutions sur $[0;2\pi[$ sont

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\}$$

4. Dire si les propriétés suivantes sont vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\sin(x + 31\pi) = -\sin(x)$

$$\sin(x + 31\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

   Donc la propriété est vraie.

(b) $\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

$$\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos(x)\times 0 - \sin(x)\times(-1) = \sin(x)$$

Donc la propriété est fausse.

(c) $\sin(2x)\cos(2x) = \sin(4x)$
On sait que $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ donc $\sin(4x) = \sin(2\times 2x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$.
Donc la propriété est fausse.

Exercice 6 *(15 minutes)*

1. Is the function $f(t) = e^{-3t} + e^{2t}$ a solution of the differential equation $\frac{dy}{dt}(t) + 3y(t) = 5e^{2t}$?
   We take the derivative of f : $f'(t) = -3e^{-3t} + 2e^{2t}$. Then

$$f'(t) + 3f(t) = -3e^{-3t} + 2e^{2t} + 3\left(e^{-3t} + e^{2t}\right) = -3e^{-3t} + 2e^{2t} + 3e^{-3t} + 3e^{2t} = 5e^{2t}$$

   So f satisfies the equation.

2. Is the function $f(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}$ a solution of the differential equation : $y''(t) - 4y(t) = t^2 + 1$?
   We take the derivatives of f : $f'(t) = \frac{1}{2}t$ and $f''(t) = \frac{1}{2}$. Then

$$f''(t) - 4f(t) = \frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}\right) = -t^2 - 1$$

   So f doesn't satisfie the equation.

3. For each differential equation below, indicate the order and if it is linear, homogenous or has constant coefficients.
   (a) $y'(t) + 3ty(t) = 0$ is a first order, linear, non-constant coefficients, homogenous differential equation.
   (b) $y'(t) \times y(t) = 2$ is a first order, non-linear, constant coefficients, non-homogenous differential equation.
   (c) $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 2t + 1$ is a second order, linear, constant coefficients, non-homogenous, differential equation.

4. Solve the differential equation : $y'(t) - 3y(t) = 0$.

$$y'(t) - 3y(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}y'(t) + y(t) = 0$$

   Let $\tau = -\frac{1}{3}$, the solutions of the equation are the functions : $y(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{3t}$ for all $k \in \mathbb{R}$.