Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Correction Devoir Surveillé 2
Vendredi 8 janvier 2021 - Durée : 1h

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. La fonction $f(x) = e^x \sin(x)$ est-elle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (4) ci-dessous ?

$$y'(x)\sin(x) - y(x)\cos(x) = e^x \sin^3(x) \tag{1}$$

On a $f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$. On remplace f dans l'équation différentielle (4) :

$$f'(x)\sin(x) - f(x)\cos(x) = e^x \sin^2(x) + e^x \cos(x)\sin(x) - e^x \sin(x)\cos(x) = e^x \sin^2(x)$$

Pour que f soit solution de l'équation différentielle, il faut également que

$$f'(x)\sin(x) - f(x)\cos(x) = e^x \sin^3(x)$$

Cela n'est possible que si $e^x \sin^2(x) = e^x \sin^3(x) \Leftrightarrow \sin(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$, ce qui est absurde.

2. (a) Résoudre sur $]-1+\infty[$ l'équation différentielle (2) suivante :

$$(1+x)y'(x) + y(x) = 0 \tag{2}$$

On a :

$$(1+x)y'(x) + y(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) + \frac{1}{1+x}y(x) = 0$$

D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est du type :

$$\mathcal{S} = \{ke^{-\ln(1+x)}/k \in \mathbb{R}\} = \left\{\frac{k}{1+x}/k \in \mathbb{R}\right\}$$

(b) Déterminer, si elle(s) existe(nt), les solutions du système suivant :

$$(*)\begin{cases} (1+x)y'(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \ ; \ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $y \in \mathcal{S}$ solution de l'équation différentielle (2). D'après la question précédente, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \dfrac{k}{1+x}$. On a $y(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$ et $y(1) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{k}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1$.

On en déduit que le système $(*)$ admet une unique solution $y(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Exercice 2 On considère l'équation différentielle suivante :

$$2y'(x) - 2y(x) = 2e^{3/2x} + y(x) \tag{3}$$

1. Déterminer le second membre ainsi que l'équation homogène associée à l'équation différentielle (3).
   Le second membre est $f(x) = 2e^{3/2x}$ et l'équation homogène associée est

$$2y'(x) - 3y(x) = 0$$

2. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation différentielle (3).
   D'après le cours, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathcal{S}_H = \{ke^{3x/2}/k \in \mathbb{R}\}$$

3. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (3).
   On remarque que le second membre est solution de l'équation homogène. C'est pourquoi on cherche une solution particulière sous la forme :
   $y_p(t) = Cxe^{3x/2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ une constante à déterminer. On a : $y_p'(t) = Ce^{3x/2} + \dfrac{3Cx}{2}e^{3x/2}$. On remplace dans l'ED (3) :

$$2y_p'(x) - 3y_p(x) = 2Ce^{3x/2} + 3Cxe^{3x/2} - 3Cxe^{3x/2} = 2Ce^{3x/2}$$

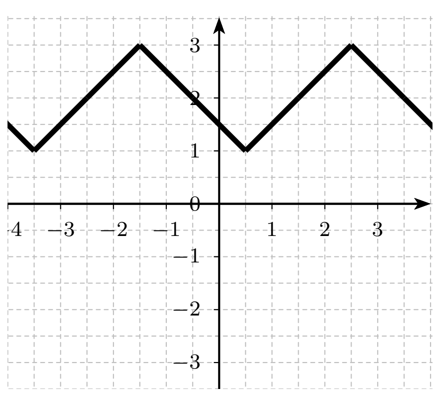
   Pour que y_p soit une solution, il faut : $2Ce^{3x/2} = 2e^{3x/2}$, d'où $C = 1$. On en déduit que $y_p(x) = xe^{3x/2}$.

4. Résoudre l'équation différentielle (3).
   D'après le cours, l'ensemble $\mathcal{S}$ de l'équation différentielle (3) est :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_H + y_p = \{ke^{3x/2} + xe^{3x/2}/k \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \tan(\cos(x))$
   $f(-x) = \tan(\cos(-x)) = \tan(\cos(x)) = f(x)$. On en déduit que f est paire.
   (b) $g(x) = x^3 - x$ $g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$. On en déduit que g est impaire.
2. h est une fonction périodique de période 4 dont la courbe est :



Déterminer les valeurs de a et b telles que la fonction $k(t) = h(t+a)+b$ soit une fonction impaire, puis tracer la courbe de k sur le même graphique.
Les valeurs $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -2$ conviennent.

Exercice 4

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique **et** exponentielle :

   (a) $z_1 = \dfrac{1-i}{2+i}$

   $$z_1 = \times\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \times\frac{2-i-2i-1}{\sqrt{5}} = \frac{-2i}{4} = \frac{1-3i}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}e^{i\pi/4}$$

   La forme algébrique de z_1 est $\dfrac{-i}{2}$ et la forme exponentielle est $\dfrac{1}{2}e^{i\pi/4}$

   (b) $z_2 = -\sqrt{3}e^{i\pi/4}$
   On sait que $-1 = e^{i\pi}$, on en déduit la forme exponentielle de z_2

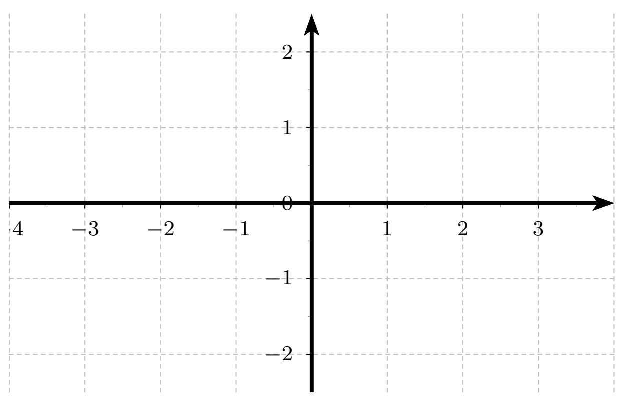
   $$z_2 = e^{i\pi}\sqrt{3}e^{i\pi/4} = \sqrt{3}e^{5i\pi/4}$$

   La forme algébrique de z_2 est :

   $$z_2 = -\sqrt{3}e^{i\pi/4} = \sqrt{3}e^{5i\pi/4} = -\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

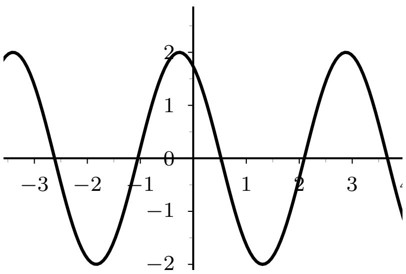
2. Placer le plus précisément possible sur le graphique ci-dessous les points d'affixes

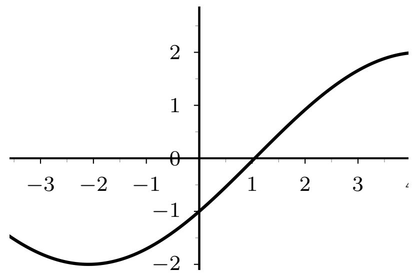
   (a) $z_1 = 2e^{3i\pi/2}$ (b) $z_2 = -3e^{i\pi}$ (c) $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$

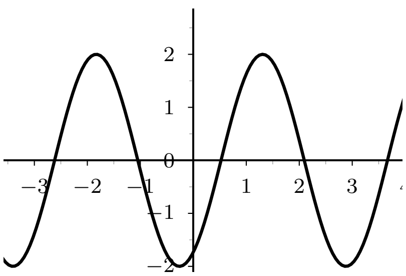


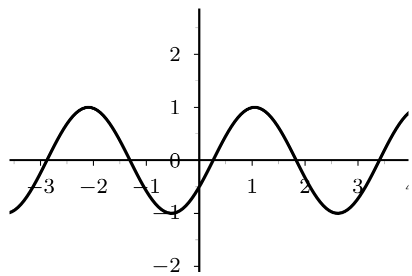
Exercice 5 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -\cos(2t) + \sqrt{3}\sin(2t)$.

1. Écrire f sous la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ avec $A > 0$
   On a $f(t) = 2\sin\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$
2. Déterminer la périodicité et l'amplitude de la fonction f.
   On a $T = \pi$ et $A = 2$.
3. Parmi les courbes suivantes, dire celle qui est la représentation graphique de f, en justifiant.
   La fonction f est π périodique, ce qui élimine la courbe (c).
   La fonction f est d'amplitude 2, ce qui élimine la courbe (d).
   On a $f(0) = 2\sin(-\pi/6) = -\sqrt{3}$, ce qui élimine la courbe (a).
   La représentation graphique de f est la courbe (b).

(a)


(c)


(b)


(d)


Exercice 6 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Linéariser l'expresssion $\cos^3(x)\sin(x)$
   On utilise les formules d'Euler :

$$\cos^3(x)\sin(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \left(\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\right)\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$
$$= \frac{e^{4ix}-e^{2ix}+3e^{2ix}-3+3-3e^{-2ix}+e^{-2ix}-e^{-4ix}}{16i} = \frac{1}{8}(\sin(4x)+2\sin(2x))$$

   (a) Déterminer les solutions de l'équation $\delta^2 = 8+6i$ (On pourra chercher δ sous la forme $\delta = a+ib$).

$$\delta^2 = 8+6i. \qquad (4)$$

   D'après le cours, cela conduit au système suivant :

$$\begin{cases} a^2-b^2 = 8 & (1) \\ 2ab = 6 & (2) \\ a^2+b^2 = 10 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow a = \pm 3,$$
$$(3) - (1) \Rightarrow 2b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm 1.$$

D'après (2), a et b sont de même signe. On en déduit que les solutions de (4) sont :

$$\mathcal{S} = \{\pm(3+i)\}.$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (1-3i)Z - (4+3i) = 0$.
On calcule le discriminant $\Delta = (1-3i)^2 - 4 \times 1 \times (-(4+3i)) = 1 - 9 - 6i + 16 + 12i = 8 + 6i$.
D'après la question précédente, les racines de Δ sont $\pm(3+i)$. On en déduit que les solutions de l'équation sont :

$$Z_1 = \frac{-(1-3i)+3+i}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \text{ et } Z_2 = \frac{-(1-3i)-3-i}{2} = \frac{-4+2i}{2} = -2+i.$$