# Mathématiques - Devoir Surveillé 2
# Vendredi 20 octobre 2017 - Durée : 1h30

*Tous documents et appareils électroniques sont interdits*

*Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.*

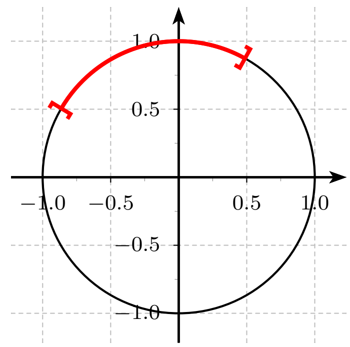
## Correction

**Exercice 1** Les questions suivantes sont indépendantes

1. Mettre la fonction $f(t) = -\frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(3t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$ :
   On pose $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
   On a alors $A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$.
   Et
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(\varphi) & = & \frac{b}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & \frac{a}{A} = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$
   Donc $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$.
   Donc
   $$f(t) = \frac{1}{2}\sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$$

2. Résoudre, sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, l'équation : $cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   $$\begin{aligned} cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \Leftrightarrow cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ & \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } 3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \\ & \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{36}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{36}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}$$
   Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ les solutions sont
   $$S = \{\frac{\pi}{36}; \frac{19\pi}{36}; \frac{25\pi}{36}; \frac{43\pi}{36}; \frac{49\pi}{36}; \frac{67\pi}{36}\}$$

3. Représenter le plus précisement possible, sur le cercle trigonométrique ci-dessous, les solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl} \sin(x) & > & \frac{1}{2} \\ \cos(x+\pi) & \geq & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$
   Le système peut s'écrire $\left\{\begin{array}{rcl} \sin(x) & > & \frac{1}{2} \\ \cos(x) & \leq & \frac{1}{2} \end{array}\right.$
   ON cherche les points du cercle tel que les 2 inéquations soient réspectées simultanément. Donc les solutions sont




**Exercice 2** Les questions suivantes sont indépendantes

1. La fonction $f(x) = \dfrac{2x}{3x-1}$ est-elle solution de l'équation : $(3x-1)y'(x) - y(x) = \dfrac{2x+2}{3x-1}$

   On dérive $f$ : $f'(x) = \dfrac{-2}{(3x-1)^2}$, puis on remplace dans l'équation :

$$\begin{aligned}(3x-1)f'(x) - f(x) &= (3x-1)\times\frac{-2}{(3x-1)^2} - \frac{2x}{3x-1}\\ &= \frac{-2}{3x-1} - \frac{2x}{3x-1}\\ &= \frac{-(2+2x)}{3x-1}\end{aligned}$$

   On n'obtient donc pas le bon second membre (il suffit de remplacer $x$ par 1 pour s'en convaincre). Donc $f$ n'est pas solution.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation : $2y'(t) - 3y(t) = 2\sin(3t)$

   • On note $y_h$ les solutions de l'équation homogène : $2y'(t) - 3y(t) = 0$

$$y_h(t) = ke^{\frac{3}{2}t} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

   • On pose $y_p(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$.
   On cherche $a$ et $b$ pour que $y_p$ soit une solution particulière de l'équation $2y'(t) - 3y(t) = 2\sin(3t)$.
   On a $y_p'(t) = -3a\sin(3t) + 3b\cos(3t)$. Donc

$$\begin{aligned}2y_p'(t) - 3y_p(t) = 2\sin(3t) &\Leftrightarrow 2(-3a\sin(3t) + 3b\cos(3t)) - 3(a\cos(3t) + b\sin(3t)) = 2\sin(3t)\\ &\Leftrightarrow -6a\sin(3t) + 6b\cos(3t) - 3a\cos(3t) - 3b\sin(3t) = 2\sin(3t)\\ &\Leftrightarrow (-6a - 3b)\sin(3t) + (6b - 3a)\cos(3t) = 2\sin(3t)\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -6a - 3b &=& 2\\ 6b - 3a &=& 0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -\frac{4}{15}\\ b &=& -\frac{2}{15}\end{array}\right.\end{aligned}$$

   Donc $y_p(t) = -\frac{4}{15}\cos(3t) - \frac{2}{15}\sin(3t)$ est une solution de l'équation $2y'(t) - 3y(t) = 2\sin(3t)$.
   • Donc les solutions de $2y'(t) - 3y(t) = 2\sin(3t)$ sont les fonctions

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = -\frac{4}{15}\cos(3t) - \frac{2}{15}\sin(3t) + ke^{\frac{3}{2}t} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

3. Déterminer une équation différentielle linéaire qui admette $f(t) = t^2 + t - 5$ comme solution.
   On a $f'(t) = 2t + 1$, donc $f$ est solution de l'équation différentielle
   $$y' + y = t^2 + 3t - 4$$
   par exemple...

**Exercice 3**

Dans cet exercice $k$ et $k'$ sont deux entiers, $x$ un réel et $f$ une fonction.
On considère les 3 propriétés suivantes

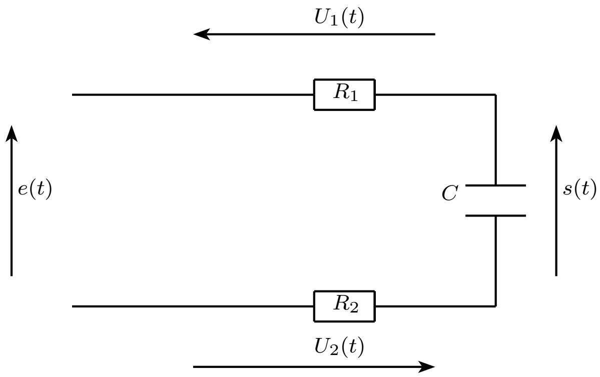
- $P_1 : \forall (k, k') \in \mathbb{N}^2 : k \neq 1$ ou $k' \neq 1 \Rightarrow k \times k' \neq 1$.
- $P_2 : \forall x \in \mathbb{R} : -|-x^2| < 0$.
- $P_3 : \forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in R$ tel que $f(x) \neq C$.

1. Donner la contraposée de la propriété $P_1$.
   La contraposée de $P_1$ est
   $$\forall (k, k') \in \mathbb{N}^2 : k \times k' = 1 \Rightarrow k = 1 \text{ et } k' = 1$$
2. La proposition $P_1$ est-elle vraie ou fausse ? (Justifier !)
   La contraposée de $P_1$ est vraie.
   En effet, si un produit de 2 nombres entiers fait 1, alors les nombres sont tous les 2 égaux à 1.
   Donc $P_1$ est vraie aussi.
3. La proposition $P_2$ est-elle vraie ou fausse ? (Justifier !)
   La proposition $P_2$ est fausse !
   Il existe un (unique) contre exemple : pour $x = 0$, on n'a pas $-|-x^2| < 0$.
4. Donner la négation de $P_3$ avec des quantificateurs. Quelle propriété graphique vérifie une fonction qui satisfait non $P_3$ ?
   La négation de $P_3$ s'écrit :
   $$\exists C \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \forall x \in R \,:\, f(x) = C$$
   Ainsi, si $f$ vérifie la négation de $P_3$, alors $f$ est une fonction constante.

**Exercice 4**

1. Écrire les trois sommes suivantes en utilisant un signe $\sum$.
   (a) $S_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{48} = \displaystyle\sum_{n=1}^{24} \frac{1}{2n}$
   (b) $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{64} = \displaystyle\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{2^n}$
   (c) $S_3 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \ldots - \dfrac{1}{28} = \displaystyle\sum_{n=3}^{28} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
2. Donner la valeur exacte des sommes
   (a) $S_4 = \displaystyle\sum_{n=2}^{8} 3 \times 2^n = 3 \times (4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256) = 3 \times 508 = 1524$
   (b) $S_5 = \displaystyle\sum_{k=3}^{5} \frac{k-1}{2k} = \frac{2}{6} + \frac{3}{8} + \frac{4}{10} = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{2}{5} = \frac{40 + 45 + 48}{3 \times 8 \times 5} = \frac{133}{120}$

**Exercice 5** On considère le circuit suivant :




On alimente en entrée avec une tension continue $e(t) = 10$ volts.

1. Montrer que le signal de sortie $s(t)$ vérifie l'équation différentielle $(E_1)$ :

$$(R_1 + R_2)C\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = 10 \qquad (E_1)$$

On note $u_1(t)$ et $u_2(t)$ les tensions aux bornes des résistances. La loi des mailles permet d'écrire que

$$e(t) = u_1(t) + s(t) + u_2(t)$$

On connaît les lois qui régissent les 2 dipôles : la résistance et le condensateur :

$$u_1(t) = R_1 \times i(t) \quad u_2(t) = R_2 \times i(t) \quad \text{et} \quad i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$$

On a donc

$$e(t) = R_1 i(t) + s(t) + R_2 i(t) = (R_1 + R_2)i(t) + s(t)$$

et

$$e(t) = (R_1 + R_2)C\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

Par ailleurs, l'entrée est une constante $e(t) = 10$.
Donc $s(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec un second membre constant :

$$(R_1 + R_2)C\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = 10 \qquad (E_1)$$

2. Déterminer, en fonction de $C$, $R_1$ et $R_2$, les solutions de l'équation $(E_1)$.

Les solutions de l'équation homogène $(R_1 + R_2)C\dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0$ sont les fonctions

$$s_h(t) = ke^{-\dfrac{t}{(R_1 + R_2)C}}; \quad k \in \mathbb{R}$$

La fonction constante $s_p(t) = 10$ est une solution particulière de l'équation $(R_1 + R_2)C\dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = 10$.
Donc les solutions de l'équation de la question 1 sont les fonctions

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t) = 10 + ke^{-\dfrac{t}{(R_1 + R_2)C}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

3. Déterminer l'unique solution de l'équation $(E_1)$ qui vérifie la condition initiale $s(0) = 0$.

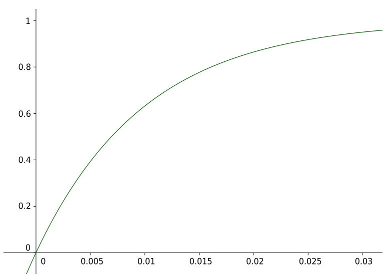
   Donc $10 + ke^{-\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}\times 0} = 0$ donc $k = -10$.

   Conclusion : l'unique fonction solution est

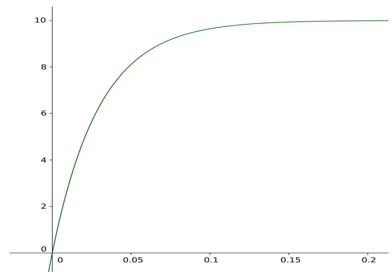
$$s(t) = 10\left(1 - e^{-\dfrac{t}{(R_1+R_2)C}}\right)$$

4. On considère : $R1 = 1K\Omega$, $R2 = 2K\Omega$ et $C = 10\mu F$. Parmi les graphiques suivants, lequel est celui de la solution trouvée à la question 3 ? (justifier !)

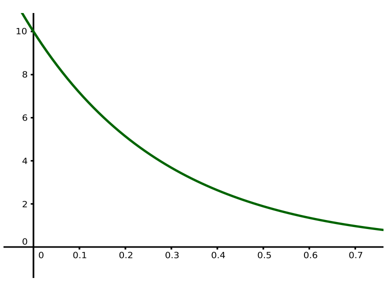
   La bonne courbe est la courbe $c$. C'est la seule qui admet la droite $y = 10$ comme asymptote horizontale en l'infini.



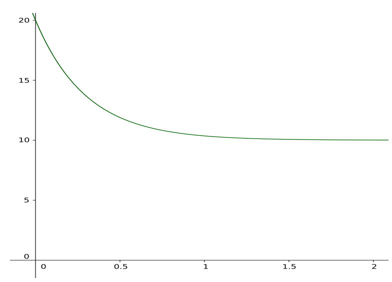

(a)




(c)




(b)




(d)