Nom : Prénom : Groupe :

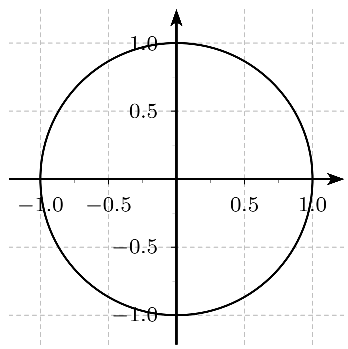
Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 20 octobre 2017 - Durée : 1h30

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes

1. Mettre la fonction $f(t) = -\frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(3t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$.
2. Résoudre, sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, l'équation : $cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Représenter le plus précisement possible, sur le cercle trigonométrique ci-dessous, les solutions du système : $\begin{cases} \sin(x) & > & \frac{1}{2} \\ \cos(x+\pi) & \geq & -\frac{1}{2} \end{cases}$



Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes

1. La fonction $f(x) = \dfrac{2x}{3x-1}$ est-elle solution de l'équation : $(3x-1)y'(x) - y(x) = \dfrac{2x+2}{3x-1}$
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation : $2y'(t) - 3y(t) = 2\sin(3t)$
3. Déterminer une équation différentielle linéaire qui admette $f(t) = t^2 + t - 5$ comme solution.

Exercice 3

Dans cet exercice k et k' sont deux entiers, x un réel et f une fonction.
On considère les 3 propriétés suivantes

- P_1 : $\forall (k, k') \in \mathbb{N}^2 : k \neq 1$ ou $k' \neq 1 \Rightarrow k \times k' \neq 1$.
- P_2 : $\forall x \in \mathbb{R} : -|-x^2| < 0$.
- P_3 : $\forall C \in \mathbb{R}$, $\exists x \in R$ tel que $f(x) \neq C$.

1. Donner la contraposée de la propriété P_1.
2. La proposition P_1 est-elle vraie ou fausse ? (Justifier !)
3. La proposition P_2 est-elle vraie ou fausse ? (Justifier !)
4. Donner la négation de P_3 avec des quantificateurs. Quelle propriété graphique vérifie une fonction qui satisfait non P_3 ?

Exercice 4

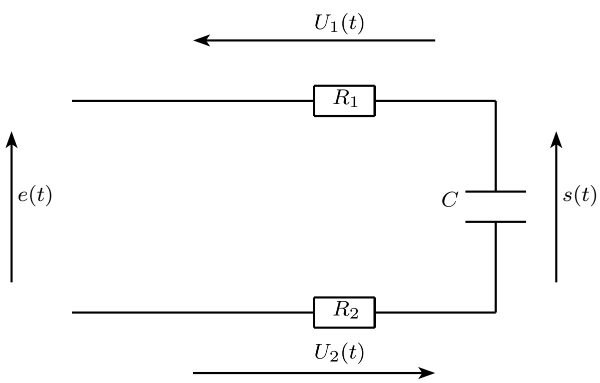
1. Écrire les trois sommes suivantes en utilisant un signe $\sum$.

(a) $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{48}$ (b) $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{64}$ (c) $S_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots - \frac{1}{28}$

2. Donner la valeur exacte des sommes

(a) $S_4 = \sum_{n=2}^{8} 3 \times 2^n$ (b) $S_5 = \sum_{k=3}^{5} \frac{k-1}{2k}$

Exercice 5 On considère le circuit suivant :

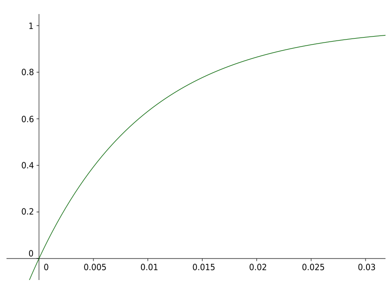


On alimente en entrée avec une tension continue $e(t) = 10$ volts.

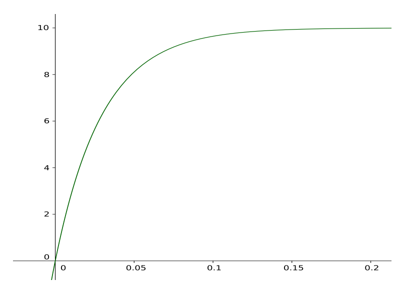
1. Montrer que le signal de sortie $s(t)$ vérifie l'équation différentielle (E_1) :

$$(R_1 + R_2)C\frac{ds}{dt}(t) + s(t) = 10 \qquad (E_1)$$

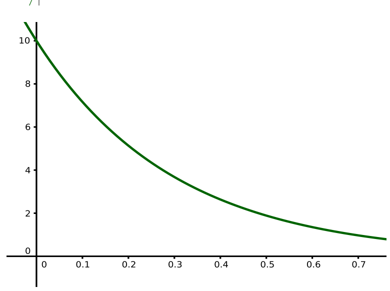
2. Déterminer, en fonction de C, R_1 et R_2, les solutions de l'équation (E_1).
3. Déterminer l'unique solution de l'équation (E_1) qui vérifie la condition initiale $s(0) = 0$.
4. On considère : $R1 = 1K\Omega$, $R2 = 2K\Omega$ et $C = 10\mu F$. Parmi les graphiques suivants, lequel est celui de la solution trouvée à la question 3 ? (justifier !)



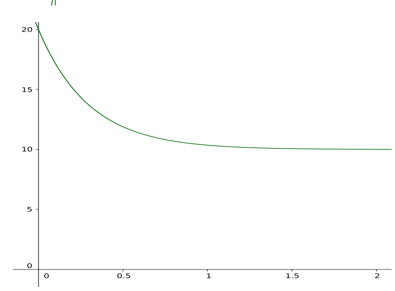
(a)



(c)



(b)



(d)