Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 18 novembre 2016 - Durée : 2h00

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A\sin(2t+\varphi)=1$ avec $A=\sqrt{2}$ et $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

On résout :

$$\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

c'est-à-dire :

$2t+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow t=k\pi$ ou $2t+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{4}+k\pi.$

D'où

$$\mathcal{S}=\left\{k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 2

Les questions sont toutes indépendantes.

1. Déterminer une solution particulière pour chacune des équations différentielles :

   (a) $y''-3y'+2y=t-3$.

   On pose $y_p(t)=at+b$; calculons a et b :
   On dérive 2 fois : $y_p'(t)=a$ et $y_p''(t)=0$,
   puis on remplace dans l'équation : $0-3a+2(at+b)=t-3$.
   Par identification : $2a=1$ et $2b-3a=-3$.
   Donc $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=-\dfrac{3}{4}$.
   <u>Conclusion :</u> La fonction $y_p(t)=\dfrac{1}{2}t-\dfrac{3}{4}$ est une solution particulière de l'équation $y''-3y'+2y=t-3$.

   (b) $2y'+3y=\sin(3t)$.

   On pose $y_p(t)=a\sin(3t)+b\cos(3t)$; calculons a et b :
   On dérive 1 fois : $y_p'(t)=3a\cos(3t)-3b\sin(3t)$,
   puis on remplace dans l'équation : $2(3a\cos(3t)-3b\sin(3t))+3(a\sin(3t)+b\cos(3t))=\sin(3t)$.
   Par identification :

   $$\begin{cases} 6a+3b=0 \\ 3a-6b=1 \end{cases}$$

   On résout le système et on trouve : $a=\dfrac{1}{15}$ et $b=-\dfrac{2}{15}$.

Conclusion : La fonction $y_p(t) = \frac{1}{15}\sin(3t) - \frac{2}{15}\cos(3t)$ est une solution particulière de l'équation $2y' + 3y = \sin(3t)$.

(c) $y'' - 2y = e^{-4t}$.

On pose $y_p(t) = ke^{-4t}$; calculons k :
On dérive 2 fois : $y_p'(t) = -4ke^{-4t}$ et $y_p''(t) = 16ke^{-4t}$,
puis on remplace dans l'équation : $16ke^{-4t} - 2 \times ke^{-4t} = e^{-4t}$.
Par identification : $14k = 1$.
Donc $k = \frac{1}{14}$.
Conclusion : La fonction $y_p(t) = \frac{1}{14}e^{-4t}$ est une solution particulière de l'équation $y'' - 2y = e^{-4t}$.

2. La fonction $f(x) = \frac{x}{x+1}$ est-elle solution de l'équation différentielle (E) ?

$$(1+x)y' + y = 1 \qquad (E)$$

Remarque : cette question est la question 1 de la feuille de soutien 7.

On calcule f' :

$$f'(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Puis on remplace f et f' dans $(1+x)f'(x)+f(x)$. Après simplification, on trouve que $(1+x)f'(x)+f(x) = \frac{1}{(x+1)} + \frac{x}{(x+1)} = 1$ donc f est solution de l'équation différentielle.

3. (a) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont $y(t) = e^{-\frac{3}{4}t}$ est solution.

Il suffit de prendre l'équation :

$$y' + \frac{3}{4}y = 0$$

(b) Déterminer une équation différentielle dont $y_1(t) = e^{-t}$ et $y_2(t) = e^{2t}$ sont solutions.

Nous allons chercher une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et homogène. On sait que si Δ est positif alors les solutions sont de la forme $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$.
On peut donc identifier $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$.
Ces 2 racines sont solutions de l'équation : $(r+1)(r-2) = 0 \Leftrightarrow r^2 - r - 2 = 0$.
Donc une équation différentielle qui répond à la question est :

$$y'' - y' - 2y = 0$$

(c) Déterminer une équation différentielle dont $y_1(t) = \cos(3t)$ et $y_2(t) = \sin(3t)$ sont solutions.

Nous allons chercher une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et homogène. On sait que si Δ est négatif alors les solutions sont de la forme $e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$.
On peut donc identifier $\alpha = 0$ et $\beta = 3$. Donc les racines complexes de l'équation caractéristique sont : $r = 3i$ et $r = -3i$. Ces 2 racines sont solutions de l'équation : $r^2 + 9 = 0$.
Donc une équation différentielle qui répond à la question est :

$$y'' + 9y = 0$$

Exercice 3 Soit l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y = 4\cos(2t) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).

   L'équation homogène s'écrit :
   $$y'' + 4y = 0 \quad (H)$$
   Son équation caractéristique est
   $$r^2 + 4 = 0 \quad (e.c)$$
   On calcule : $\Delta = -16$, donc les solutions de $(e.c)$ sont $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$.
   On pose donc $\alpha = Re(r_1) = 0$ et $\beta = Im(r_1) = 2$ Donc les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :
   $$y_h(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$$
   Pour tout A et B réels.

2. Est-il possible de trouver une solution particulière de (E) de la forme $y_p(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$?

   Non, ce n'est pas possible !
   Deux manières de s'en convaincre :
   1) Si on calcule les dérivées y_p' et y_p'' et qu'on remplace dans (E) alors on obtient : $0 = 4\cos(2t)$. On ne peut donc pas identifier a et b.

   2) Le second membre est solution de (H). Donc si on remplace dans (E) on aura nécessairement $y_p''(t) + 4y_p(t) = 0$ et non $4\cos(2t)$.

3. Montrer que la fonction $y(t) = t\sin(2t)$ est solution de (E).

   On dérive 2 fois puis on remplace dans (E) :
   $$y'(t) = \sin(2t) + 2t\cos(2t) \quad \text{et} \quad y''(t) = 2\cos(2t) + 2\cos(2t) - 4t\sin(2t)$$
   Donc $y''(t) + 4y(t) = 2\cos(2t) + 2\cos(2t) - 4t\sin(2t) + 4t\sin(2t) = 4\cos(2t)$.
   Donc la fonction est bien solution.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

   La fonction $y(t) = t\sin(2t)$ est une solution particulière de (E), d'après la question précédente.
   Donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :
   $$y(t) = y_h(t) + t\sin(2t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) + t\sin(2t)$$
   Pour tout A et B réels.

5. Est-il possible de trouver une solution de (E) telle que $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$ et $y'(0) = 0$?

   Oui. D'après un théorème du cours ; lorsque les conditions initiales sont de la forme : $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_1) = y_1$ alors il existe toujours une et une seule fonction solution (et donc un unique couple A et B).

Pour se convaincre on peut aussi calculer A et B :
On calcule au préalable la dérivée de la solution : $y'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) + \sin(2t) + 2t\cos(2t)$
$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow A\cos\frac{\pi}{4} + B\sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{4}$,
et $y'(0) = 0 \Rightarrow -2A\sin(0) + 2B\cos(0) = 0$.
On trouve $B = 0$ et $A = -\dfrac{\pi}{8}$. Il y a donc bien un couple (et un seul) (A, B) qui permet de réaliser les conditions initiales.

Exercice 4 Soient Z_1, Z_2 et Z_3 les nombres complexes

$$Z_1 = \sqrt{3} - i \quad \text{et} \quad Z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{7}} \quad \text{et} \quad Z_3 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$$

1. Calculer le module et un argument de Z_1.

   $|Z_1| = \sqrt{3+1} = 2$ et $\theta_1 = arg(Z_1) = -\dfrac{\pi}{6}$ (car $\cos(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta_1) = -\frac{1}{2}$).

2. Déterminer la forme algébrique de Z_3

   On développe :

$$\begin{aligned} Z_3 &= \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \\ &= e^0 + e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6} - i\frac{\pi}{3}} - e^0 \\ &= 1 + e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1 \\ &= e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

   On peut alors, soit écrire les formes algébriques de $e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{6}}$: $Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = i$,
   soit utiliser une formule d'Euler : $Z_3 = 2i \times \dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i} = 2i\sin\dfrac{\pi}{6} = i$.

3. Déterminer la forme algébrique de Z_1^2.

   On développe : $Z_1^2 = (\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 2\sqrt{3}i + i^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

4. Déterminer la forme algébrique de Z_1^{10}.

   On ne développe pas ! On utilise la forme exponentielle de Z_1 :

$$\begin{aligned} Z_1^{10} &= \left(\sqrt{3} - i\right)^{10} \\ &= \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{10} \\ &= 2^{10}e^{-i\frac{10\pi}{6}} \\ &= 1024e^{-i\frac{5\pi}{3}} \\ &= 1024e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= 1024\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 1024\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 512 + 512\sqrt{3}i \end{aligned}$$

5. Calculer le module de $Z_1 Z_2^3$.

   On utilise les formules du cours sur le module :

$$|Z_1 Z_2^3| = |Z_1| \times |Z_2|^3 = 2 \times 3^3 = 54$$

6. Calculer un argument de $\dfrac{3Z_1}{Z_2}$.

   On utilise les formules du cours sur l'argument :

$$arg\left(\frac{3Z_1}{Z_2}\right) = arg(3) + arg(Z_1) - arg(Z_2) = 0 - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{7} = -\frac{13\pi}{42}$$

Exercice 5 Dans chacun des cas, déterminer un nombre complexe qui satisfait les propriétés :

1. $Re(Z_1) = 6$ et $Arg(Z_1) = \dfrac{\pi}{4}$

   Un nombre complexe a pour argument $\dfrac{\pi}{4}$ lorsque ses parties réelle et imaginaire sont égales. Donc

$$Z_1 = 6 + 6i$$

2. $Im(Z_2) = -5$ et $|Z_2| = 13$

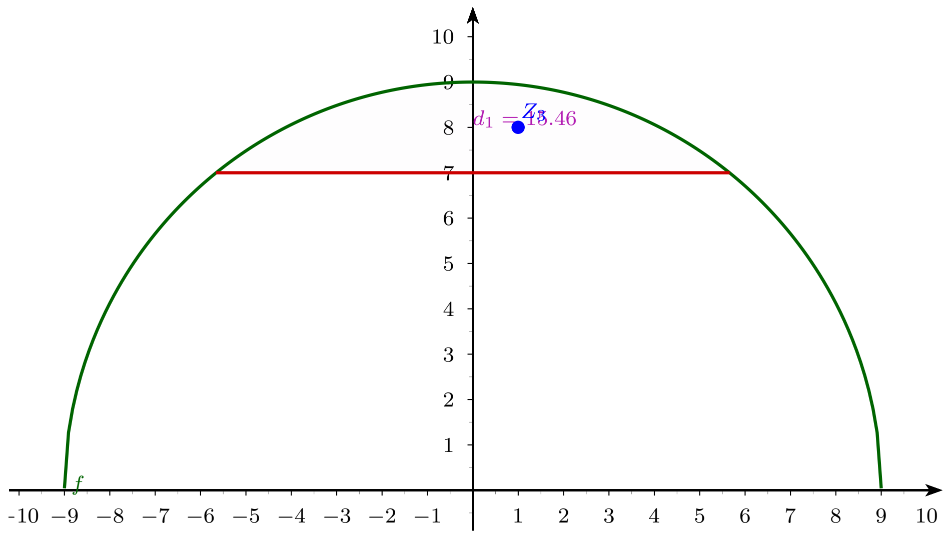
   On cherche Z_2 sous forme algébrique : $Z_2 = a + ib$. On sait que $|Z_2|^2 = a^2 + b^2$, donc

$$13^2 = a^2 + (-5)^2 \Leftrightarrow a^2 = 144$$

   Donc la partie réelle de Z_2 est 12 ou -12. Les 2 réponses possibles sont

$$Z_2 = 12 - 5i \quad \text{et} \quad Z_2 = -12 - 5i$$

3. $Im(Z_3) > 7$, $|Z_3| < 9$ et Z_3 n'est pas un imaginaire pur (plusieurs réponses possibles).
   Graphiquement on doit choisir un nombre complexe qui est dans la zone :



   On pose $Z_3 = 1 + 8i$. On a clairement $Im(Z_3) > 7$ et $|Z_3| = \sqrt{65} < 9$.
   Remarque : il y a 8 réponses possibles à la question.

Exercice 6 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i+1) = n(2n+3)$.

On note P_n l'égalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i+1) = n(2n+3)$. Montrons que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par récurrence :

• <u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1}(4i+1) = 4 \times 1 + 1 = 5$$

et

$$1(2 \times 1 + 3) = 5$$

Donc P_1 est vraie.

• <u>Hérédité :</u> montrons que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

On suppose que P_n est vraie : $\sum_{i=1}^{n}(4i+1) = n(2n+3)$,

et on montre que P_{n+1} est vraie : $\sum_{i=1}^{n+1}(4i+1) = (n+1)(2n+5)$.

On extrait le $n+1$-ième terme de la somme de P_{n+1} puis on utilise l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(4i+1) &= \sum_{i=1}^{n}(4i+1) + 4(n+1) + 1 \\ &= n(2n+3) + 4(n+1) + 1 \\ &= 2n^2 + 7n + 5\end{aligned}$$

Or $(n+1)(2n+5) = 2n^2 + 7n + 5$ (il suffit de développer). Donc P_{n+1} est vraie.

• <u>Conclusion :</u> P_1 est vraie et $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc d'après le raisonnement par récurrence : P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.