Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 18 novembre 2016 - Durée : 2h00

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A\sin(2t+\varphi) = 1$ avec $A = \sqrt{2}$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 2 Les questions sont toutes indépendantes.

1. Déterminer une solution particulière pour chacune des équations différentielles :
   (a) $y'' - 3y' + 2y = t - 3$
   (b) $2y' + 3y = \sin(3t)$
   (c) $y'' - 2y = e^{-4t}$
2. La fonction $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ est-elle solution de l'équation différentielle (E) ?

$$(1+x)y' + y = 1 \qquad (E)$$

3. (a) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont $y(t) = e^{-\frac{3}{4}t}$ est solution.
   (b) Déterminer une équation différentielle dont $y_1(t) = e^{-t}$ et $y_2(t) = e^{2t}$ sont solutions.
   (c) Déterminer une équation différentielle dont $y_1(t) = \cos(3t)$ et $y_2(t) = \sin(3t)$ sont solutions.

Exercice 3 Soit l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y = 4\cos(2t) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Est-il possible de trouver une solution particulière de (E) de la forme $y_p(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$?
3. Montrer que la fonction $y(t) = t\sin(2t)$ est solution de (E).
4. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
5. Est-il possible de trouver une solution de (E) telle que $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$ et $y'(0) = 0$?

Exercice 4 Soient Z_1, Z_2 et Z_3 les nombres complexes

$$Z_1 = \sqrt{3} - i \quad \text{et} \quad Z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{7}} \quad \text{et} \quad Z_3 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$$

1. Calculer le module et un argument de Z_1.
2. Déterminer la forme algébrique de Z_3
3. Déterminer la forme algébrique de Z_1^2.
4. Déterminer la forme algébrique de Z_1^{10}.
5. Calculer le module de $Z_1 Z_2^3$.
6. Calculer un argument de $\dfrac{3Z_1}{Z_2}$.

Exercice 5 Dans chacun des cas, déterminer un nombre complexe qui satisfait les propriétés :

1. $Re(Z_1) = 6$ et $Arg(Z_1) = \dfrac{\pi}{4}$
2. $Im(Z_2) = -5$ et $|Z_2| = 13$
3. $Im(Z_3) > 7$, $|Z_3| < 9$ et Z_3 n'est pas un imaginaire pur (plusieurs réponses possibles).

Exercice 6 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i+1) = n(2n+3)$.