Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 2
Vendredi 20 novembre 2015 - Durée : 2h00

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Donner toutes les solutions réelles de : $\sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t) = 1$.

Exercice 2 Dans cet exercice on s'intéresse aux équations différentielles suivantes :

$$y''(t) - 4y'(t) + y(t) = \cos(t) + 3\sin(t) \tag{1}$$

$$y''(t) - 4y'(t) + y(t) = 0 \tag{2}$$

1. *Un peu de vocabulaire* Remplacer les pointillés suivants par le vocabulaire approprié.
   (a) Les équations différentielles (1) et (2) sont des équations du .... ordre.
   (b) La fonction $f(t) = \cos(t) + 3\sin(t)$ est appelée ....
   (c) L'équation (2) est appelée .... associée à (1).
   (d) Le trinôme du second degré :
   $$X^2 - 2X + 1 = 0 \tag{3}$$
   est appelé .... associée à (2).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2).
3. Déterminer la valeur des constantes A et B pour que $y(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ soit solution de l'équation différentielle (1).
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).
5. (a) Déterminer la solution de l'équation (2) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
   (b) Déterminer la solution de l'équation (1) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 3

1. On considère la fonction $f(x) = -\dfrac{2x\ln(x)}{1+x^2}$.
   (a) Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle est la dérivée de la fonction f (toute réponse non justifiée ne rapporte pas de point) ?
   i. $\dfrac{4x\ln(x)}{(1+x^2)^2} - \dfrac{2}{x(1+x^2)}$ ii. $\dfrac{2(x^2-1)\ln(x)}{(1+x^2)^2} - \dfrac{2}{1+x^2}$ iii. $\dfrac{2(\ln(x)+1)}{(1+x^2)^2}$

(b) La fonction f est-elle solution de l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y'(x) + \frac{x^2-1}{x}y(x) = -2 \text{ ?}$$

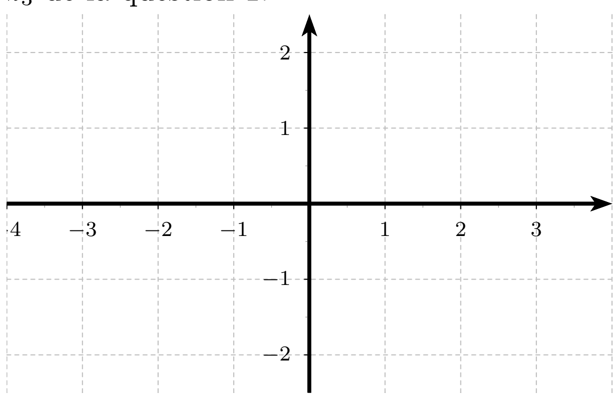
2. On rappelle qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.
   (a) Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x\ln(x)}$.
   (b) En déduire la forme des solutions de l'équation différentielle sur $]1,+\infty[$:

$$\ln(x)y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0.$$

Exercice 4

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :
   (a) $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$,
   (b) $z_2 = -\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$,
   (c) $z_3 = \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$,
   (d) $z_4 = i\dfrac{(1+i)^8}{8}$,
   (e) $z_5 = \dfrac{\sin(x)+i\cos(x)}{2(\cos(x)-i\sin(x))}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

2. Placer le plus précisément possible sur le graphique ci-dessous les points d'affixes z_1, z_2 et z_3 de la question 1.



Exercice 5

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
2. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes :
   (a) $\cos(5x)\cos(7x)$,
   (b) $\cos^3(x)\sin^2(x)$.