Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 29 septembre 2023 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

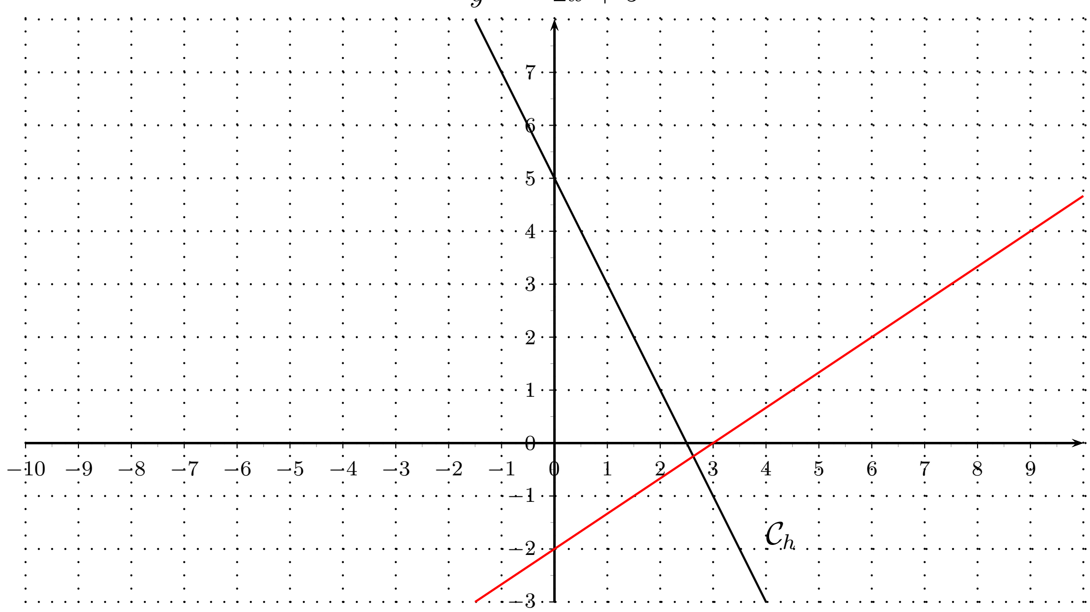
Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Tracer, sur le graphique ci-dessous, la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x - 2$.
   La droite passe par le point $(0, -2)$.
   La droite passe par le point $(3, 0)$.

2. Donner l'équation de la droite $\mathcal{C}_h$ tracée ci-dessous.
   On calcule le coefficient directeur grâce à la formule $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -2$ (en effet pour un $\Delta x = 1$ on observe un Δy de -2.)
   Puis on peut aisément lire l'ordonnée à l'origine : $b = 5$.
   L'équation de la droite est donc

$$y = -2x + 5$$



Exercice 2 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = 3t^6 + \cos(t) + 2 \Rightarrow f_1'(t) = 18t^5 - \sin(t)$
2. $f_2(t) = \ln(2t-1) + \dfrac{1}{t} \Rightarrow f_2'(t) = \dfrac{2}{2t-1} - \frac{1}{t^2}$
3. $f_3(t) = \sqrt{12t+6} \Rightarrow f_3'(t) = \dfrac{12}{2\sqrt{12t+6}} = \dfrac{6}{\sqrt{12t+6}}$
4. $f_4(t) = 4\sin(3t) \Rightarrow f_4'(t) = 12\cos(3t)$

5. $f_5(t) = te^{2t+1} \Rightarrow f_5'(t) = e^{2t+1} + 2te^{2t+1}$

6. $f_6(t) = \dfrac{t^2+3t+1}{t-1} \Rightarrow f_6'(t) = \dfrac{(2t+3)(t-1)-(t^2+3t+1)}{(t-1)^2} = \dfrac{t^2-2t-4)}{(t-1)^2}$

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Simplifier les écritures :
   (a) $A = \sqrt{405} - 4\sqrt{5} = \sqrt{81 \times 5} - 4\sqrt{5} = 9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
   (b) $B = \dfrac{256+8^2}{3 \times 8} = \dfrac{8 \times 32 + 8^2}{3 \times 8} = \dfrac{8 \times (32+8)}{3 \times 8} = \dfrac{32+8}{3} = \dfrac{40}{3}$
   (c) $C = \dfrac{(0,0001)^3 \times 10^3}{10000 \times 100} = \dfrac{(10^{-4})^3 \times 10^3}{10^4 \times 10^2} = 10^{-12+3-4-2} = 10^{-15}$

2. Résoudre l'équation $\dfrac{3}{5(x+4)} = \dfrac{4}{x+1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5(x+4)} = \frac{4}{x+1} &\Leftrightarrow 3(x+1) = 4 \times 5(x+4) \\
&\Leftrightarrow 3x+3 = 20x+80 \\
&\Leftrightarrow 3x-20x = 80-3 \\
&\Leftrightarrow -17x = 77 \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{77}{17}
\end{aligned}$$

3. On considère l'expression $\dfrac{a}{b(c-d)} = \dfrac{d}{c-d}$. Déterminer c en fonction de a, b et d.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b(c-d)} = \frac{d}{c-d} &\Leftrightarrow a(c-d) = d \times b(c-d) \\
&\Leftrightarrow ac - ad = dbc - bd^2 \\
&\Leftrightarrow ac - dbc = -bd^2 + da \\
&\Leftrightarrow c(a-db) = -bd^2 + da \\
&\Leftrightarrow c = \frac{-bd^2+da}{a-db} \\
&\Leftrightarrow c = \frac{d(a-bd)}{a-db} \\
&\Leftrightarrow c = d
\end{aligned}$$

Or d est valeur interdite ! Il n'y a donc pas de solution à cette équation d'inconnue c.

Exercice 4

1. Développer et **calculer** chacune des sommes suivantes :
   (a) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} 2k-1 = 1+3+5+7+9+11+13+15 = 64$
   (b) $S_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{9} \frac{1}{10} = \frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10} = 10 \times \frac{1}{10} = 1$

2. Ecrire les sommes suivantes en utilisant un signe Σ :

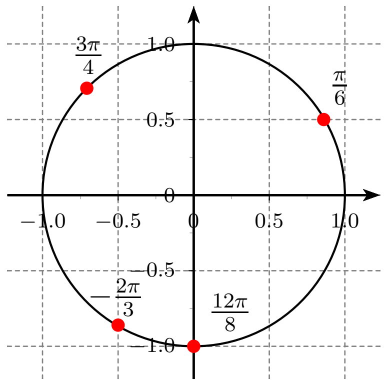
   (a) $S_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{100} \quad = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{5k}$

   (b) $S_4 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + 256 = \sum_{k=0}^{8} (-2)^k$

Exercice 5 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Placer, le plus précisement possible, les angles suivants sur le cercle trigonométrique ci-dessous.

   (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $-\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{12\pi}{8}$



2. Donner la mesure principale des angles suivants :

   (a) $\theta_1 = \frac{53\pi}{2} = \frac{52\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 26\pi + \frac{\pi}{2}$ donc

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

   (b) $\theta_2 = \frac{55\pi}{6} = \frac{60\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 10\pi - \frac{5\pi}{6}$ donc

$$\theta_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

   (c) $\theta_3 = -\frac{2023\pi}{4} = -\frac{2024\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -506\pi + \frac{\pi}{4}$ donc

$$\theta_3 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 6 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

   (a) Traduire et **expliquer** la phrase mathématique suivante :

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = 0$$

   Traduction : « il existe un réel x tel que $f(x)$ est égal à 0.
   Interprétation : l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution. Autrement dit, la courbe représentative de la fonction f coupe au moins une fois l'axe des abscisses.

(b) Donner la négation de cette phrase en math et en français.
La négation s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$$

2. Déterminer en justifiant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 81 \Leftrightarrow x = 9$ **FAUX**.
Contre-exemple : pour $x = -9$, la propriété $x^2 = 81$ est vraie mais la propriété $x = 9$ est fausse. Donc l'implication est fausse.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq -3$ **VRAI**.
La contraposée de l'implication s'écrit : $x = -3 \Rightarrow x^2 = 9$. Cette implication est vraie, donc l'implication de la question est vraie aussi.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow x > -1$ **VRAI**.
L'intervalle $]0, +\infty[$ est inclus dans l'intervalle $]-1, +\infty[$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}^*, x < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2}$ **FAUX**.
Contre-exemple : pour $x = -1$, la propriété $x < 2$ est vraie mais la propriété $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ est fausse. Donc l'implication est fausse.

(e) $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{2+x}{2} = x$ **FAUX**.
Contre-exemple : pour $x = 1$, $\dfrac{2+1}{2} \neq 1$.

(f) $\exists x \in \mathbb{R}, \dfrac{\frac{2}{3}}{x} = \dfrac{2}{\frac{3}{x}}$ **VRAI**.
Exemple : pour $x = 1$ on a $\frac{\frac{2}{3}}{x} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{\frac{3}{x}} = \frac{2}{\frac{3}{1}} = \frac{2}{3}$.

(g) $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, A = (a+b)^2 + (a-b)^2 + a^2 + b^2$ est un multipe de 3. **VRAI**.
On développe poru simplifier l'écriture de A :

$$A = (a+b)^2 + (a-b)^2 + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + b^2 = 3a^2 + 3b^2 = 3(a^2 + b^2)$$

Comme a et b sont des entiers, $a^2 + b^2$ est aussi un entier et donc A est multiple de 3.