Nom : Prénom : Groupe :

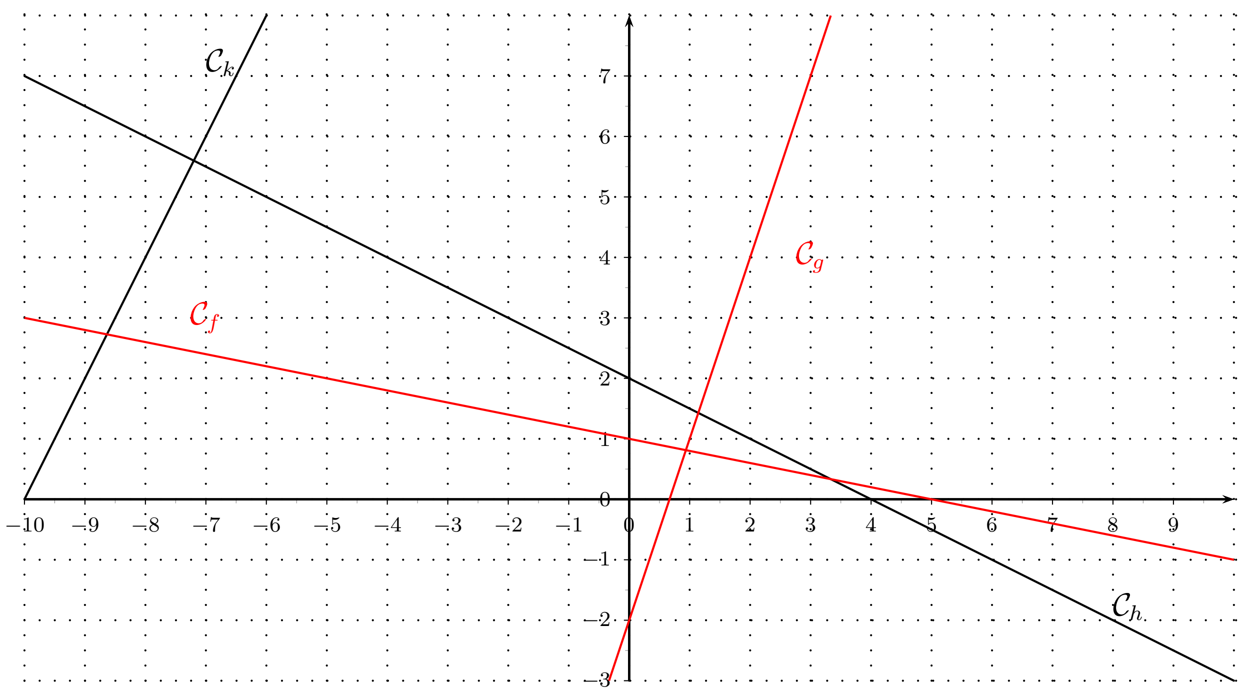
Mathématiques - Correction du Devoir Surveillé 1
Vendredi 30 septembre 2022 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

1. Tracer, sur le graphique ci-dessous, les droites représentatives des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = -\frac{x}{5} + 1$. Sachant que l'ordonnée à l'origine vaut 1, la droite passe par le point $(0, 1)$. Par ailleurs, le coefficient directeur vaut $-\dfrac{1}{5}$ donc la droite passe par le point $(5, 0)$ (on avance de 5 et on descend de 1).
   (b) $g(x) = 3x - 2$. Même démarche avec : ordonnée à l'origine $=$ -2 et coefficient directeur $=$3.
2. Donner les équations de chacune des droites suivantes ($\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_k$).
   • Équation de h : la droite coupe l'axe des ordonnées en 2. Donc $y = ax + 2$.
   De plus en prenant 2 points sur la droite on trouve que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{2}$. Donc $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.
   • Équation de k : en prenant 2 points sur la droite on trouve que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$. Donc $y = 2x + b$.
   On remplace alors x et y par les coordonnées d'un point de la droite, par exemple le point (-10,0) : $0 = 2 \times (-10) + b$. On en déduit que $b = 20$ et donc que l'équation de k est $y = 2x + 20$.



Exercice 2 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = 2t^5 + 3t^4 - 4t^3 - 5t^2 + 6t + 7$
   On utilise la formule de la dérivée de t^n
   $$f_1'(t) = 10t^4 + 12t^3 - 12t^2 - 10t + 6$$

2. $f_2(t) = \cos(t)\sin(t)$
   On utilise la formule de la dérivée de uv :
   $$f_2'(t) = u'v + uv' = -\sin(t)\sin(t) + \cos(t)\cos(t) = -\sin^2(t) + \cos^2(t)$$

3. $f_4(t) = \dfrac{1}{(3t+2)^4}$
   On utilise la formule de la dérivée de $\dfrac{u}{v}$
   $$f_4'(t) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0 - 1 \times 4 * 3 * (3t+2)^3}{(3t+2)^8} = \frac{-12}{(3t+2)^5}$$
   On pouvait aussi passer directement par la dérivée de $\dfrac{1}{u^n}$...

4. $f_5(t) = \dfrac{t^2+3}{t+3}$
   On utilise la formule de la dérivée de $\dfrac{u}{v}$
   $$f_5'(t) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2t(t+3) - (t^2+3)}{(t+3)^2} = \frac{t^2 + 6t - 3}{(t+3)^2}$$

5. $f_7(t) = \ln(2t+5)$
   On utilie la formule de la dérivée de $\ln(u)$
   $$f_7'(t) = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2t+5}$$

6. $f_8(t) = e^{\frac{t}{2}}$
   On utilise la formule de la dérivé de e^u :
   $$f_8'(t) = u'e^u = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}$$

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Ecrire $A = \dfrac{2022}{9}$ sous la forme $E + \frac{P}{Q}$ oú E est un nombre entier et $\frac{P}{Q}$ est une fraction irréductible.
   $$A = \frac{2022}{9} = \frac{3 \times 674}{3 \times 3} = \frac{674}{3} = \frac{3 \times 224 + 2}{3} = 224 + \frac{2}{3}$$

2. Simplifier les écritures :
   (a) $B = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{27}}{\sqrt{12}}$
   $$B = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{27}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3 \times 4} - \sqrt{3 \times 9}}{\sqrt{3 \times 4}} = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

(b) $C = \frac{16^4+8^3}{4^5}$

$$C = \frac{16^4+8^3}{4^5} = \frac{(2^4)^4+(2^3)^3}{(2^2)^5} = \frac{2^{16}+2^9}{2^{10}} = \frac{2^{16}}{2^{10}} + \frac{2^9}{2^{10}} = 2^6 + \frac{1}{2} = 64 + \frac{1}{2}$$

3. On considère l'expression $\frac{\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \gamma$. Déterminer b en fonction de a, α, β et γ.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b} = \gamma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{a}+\frac{\gamma}{b} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{b}-\frac{\gamma}{b} = \frac{\gamma}{a}-\frac{\alpha}{a} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\beta-\gamma}{b} = \frac{\gamma-\alpha}{a} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma-\alpha} \times a = b
\end{aligned}$$

Exercice 4 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui convient : $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^3 = 8 \ \Leftrightarrow x = 2$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^4 = 16 \ \Leftarrow x = 2$
3. Soit N un entier. "N n'est pas un multiple de 3" $\Leftrightarrow$ "N^2 n'est pas un multiple de 3"

Exercice 5 Répondre par **Vrai ou Faux en justifiant** (toute réponse non justifiée ne rapporte rien).

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{2-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = -1$

   FAUX : contre exemple : pour $x = 1$ on a $\dfrac{2-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{2-\frac{1}{1}}{2+\frac{1}{1}} = \dfrac{2-1}{2+1} \neq -1$

2. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, $\dfrac{4x^2-1}{2x-1} = 2x+1$

   VRAI : En effet $4x^2-1 = (2x-1)(2x+1)$ donc $\dfrac{4x^2-1}{2x-1} = \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1} = 2x+1$

3. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2+2x+1 = 0$

   VRAI : On remarque qu'il s'agit d'une identité remarquable, la propriété s'écrit donc également $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $(x+1)^2 = 0$. Prenons $x = -1$ on a $x^2+2x+1 = (-1)^2+2\times(-1)+1 = 1-2+1 = 0$. Donc il existe bien au moins une valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie.

Exercice 6

1. Développer et **calculer** chacune des sommes suivantes :

   (a) $S_1 = \sum_{k=0}^{9} 3k+1 = 1+4+7+10+13+16+19+22+25+28 = 145$

   (b) $S_2 = \sum_{n=1}^{10} 2 = 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 20$

2. Ecrire les sommes suivantes en utilisant un signe Σ :

   (a) $S_3 = 3+6+9+12+\cdots+27 = \displaystyle\sum_{k=1}^{9} 3k$

(b) $S_4 = \frac{5}{7} + \frac{7}{9} + \frac{9}{11} + \cdots + \frac{15}{17} = \sum_{k=3}^{8} \frac{2k-1}{2k+1}$

Exercice 7 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3\cos(2t)$ est-elle solution de l'équation différentielle $-\cos(2t)y'(t) + 2\sin(2t)y(t) = 0$?
   On va remplacer y et y' par f et f'.
   Or $f'(t) = -6\sin(2t)$. Donc
$$\begin{aligned} -\cos(2t)f'(t) + 2\sin(2t)f(t) &= -\cos(2t) \times (-6\sin(2t)) + 2\sin(2t) \times 3\cos(2t) \\ &= 12\sin(2t)\cos(2t) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $RC\frac{du}{dt}(t) = 1$ où R et C sont des constantes.
   Il suffit de faire une primitive :
$$\begin{aligned} RC\frac{du}{dt}(t) = 1 &\Leftrightarrow \frac{du}{dt}(t) = \frac{1}{RC} \\ &\Leftrightarrow u(t) = \frac{1}{RC}t + k \end{aligned}$$
   pour tout $k \in \mathbb{R}$
   (b) $\begin{cases} 3y'(t) - 2y(t) = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$
   L'équation différentielle est une équation homogène. Les solutions sont de la forme $y(t) = ke^{\frac{2}{3}t}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$.
   Calculons k grâce à la condition initiale : $y(1) = 2$ donc $ke^{\frac{2}{3}} = 2$ donc $k = 2e^{-\frac{2}{3}}$.
   Conclusion : l'unique solution est
$$y(t) = 2e^{-\frac{2}{3}} \times e^{\frac{2}{3}t}$$