Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1 - Correction
Vendredi 01 octobre 2021 - Durée : 2h00

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{x^4+2x^3+4}$
   Forme $e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^4 + 2x^3 + 4$.
   On a alors : $u'(x) = 4x^3 + 6x^2$ et
   $$f'(x) = (4x^3 + 6x^2)e^{x^4+2x^3+4} = 2x^2(2x + 3)e^{x^4+2x^3+4}.$$

2. $g(x) = (2x + 1)\cos(x)$
   Forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = \cos(x)$.
   On a alors : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -\sin(x)$. Donc,
   $$g'(x) = 2\cos(x) - (2x + 1)\sin(x)$$

3. $u(x) = \ln(x^2 + 1)$
   Forme $\ln(w(x))$ avec $w(x) = x^2 + 1$.
   On a alors : $w'(x) = 2x$ et
   $$u'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

4. $v(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$
   Forme $\sqrt{w(x)}$ avec $w(x) = 3x^2 + 4$.
   On a alors : $w'(x) = 6x$ et
   $$v'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 4}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$$

Exercice 2

1. Déterminer les valeurs de x décrites par les inéquations suivantes :
   (a) $|x| \leq -\sqrt{3}$
   Impossible ! Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$.
   (b) $|x - 3| \geq 2$
   $|x - 3| \geq 2 \Leftrightarrow x - 3 \geq 2$ ou $x - 3 \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 5$ ou $x \leq 1$.
   (c) $|4x + 1| < 1$
   $|4x + 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 4x + 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < 4x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   (a) $|-3x| = 1$
   $|-3x| = 1 \Leftrightarrow |3x| = 1 \Leftrightarrow 3x = 1$ ou $3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{1}{3}$.

$$S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$$

   (b) $|x-1| + |4x+6| = 25$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$\|x-1\|$			$-x+1$		0	$x-1$	
$\|4x+6\|$		$-4x-6$	0		$4x+6$		
$\|x-1\|+\|4x+6\|$		$-5x-5$		$3x+7$		$5x+5$	

   * Sur $]-\infty, -\frac{3}{2}]$,

$$|x-1| + |4x+6| = 25 \Leftrightarrow -5x-5 = 25 \Leftrightarrow -5x = 30 \Leftrightarrow x = -6 \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$

   * Sur $[-\frac{3}{2}, 1]$,

$$|x-1| + |4x+6| = 25 \Leftrightarrow 3x+7 = 25 \Leftrightarrow 3x = 18 \Leftrightarrow x = 6 \notin \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$$

   * Sur $[1, +\infty[$,

$$|x-1| + |4x+6| = 25 \Leftrightarrow 5x+5 = 25 \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow x = 4 \in [1, +\infty[$$

$$S = \{-6; 4\}$$

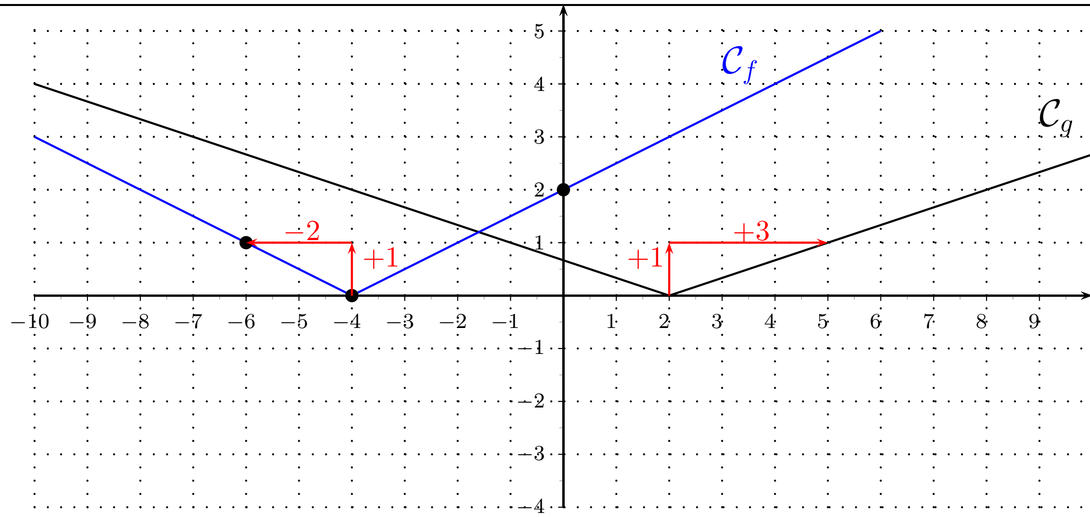
3. Tracer sur le graphique ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie par

$$f(x) = \left|\frac{1}{2}x + 2\right|$$

   Justifier la démarche.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$\left\|\frac{1}{2}x+2\right\|$		$-\frac{1}{2}x-2$	0	$\frac{1}{2}x+2$	

La fonction f s'annule en $x = -4$, on peut donc placer le point de coordonnées $(-4; 0)$.
Sur $[-4, +\infty[$, on doit tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$. Pour cela, on calcule $f(0) = 2$, on place le point de coordonnées $(0; 2)$ puis on relie les points.
Sur $]-\infty, -4]$, on doit tracer la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x - 2$. Comme le coefficient directeur de cette droite est $-\frac{1}{2}$, pour trouver un deuxième point, on monte de 1 et on se décale de 2 vers la gauche en partant du point $(-4; 0)$.



4. Déterminer l'expression de la fonction g représentée sur le graphique ci-dessus en utilisant une valeur absolue.
La fonction g est représentée par deux portions de droite, son expression est donc de la forme :

$$g(x) = |ax + b|$$

On remarque que la fonction g s'annule en $x = 2$, on a donc :

$$g(2) = |2a + b| = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$$

Sur $[2, +\infty[$, le coefficient directeur de la droite est $a = \frac{1}{3}$.
On a alors $\frac{2}{3} + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{2}{3}$.
L'expression de g est donc :

$$g(x) = \left|\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right|$$

Exercice 3

Les questions 1 et 2 ne sont **pas** indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + 4x - 5 = 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-5) = 36 > 0$$

L'équation admet 2 solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-4+6}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4-6}{2} = -5$$

2. Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$$

(a) Donner l'ensemble de définition de f.
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

(b) Déterminer la fonction dérivée de f.
Forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 2x + 1$ et $v(x) = x + 2$.
On a alors $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = 1$. Donc

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+2) - (x^2 - 2x + 1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 4x - 4 - x^2 + 2x - 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$$

(c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

(d) Déterminer les limites de f en -2.
En $x = -2$, on a $x^2 - 2x + 1 = 9$, d'où :

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} \frac{9}{x+2}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-2} x + 2 = 0$, on a :

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{9}{x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{9}{x+2} = -\infty$$

(e) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
Pour déterminer les variations de la fonction, on cherche le signe de la dérivée.
Comme pour tout $x \in D_f$, $(x+2)^2 > 0$, la dérivée est du signe de $x^2 + 4x - 5$.
On reconnait le trinôme de la question 1.

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-12	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

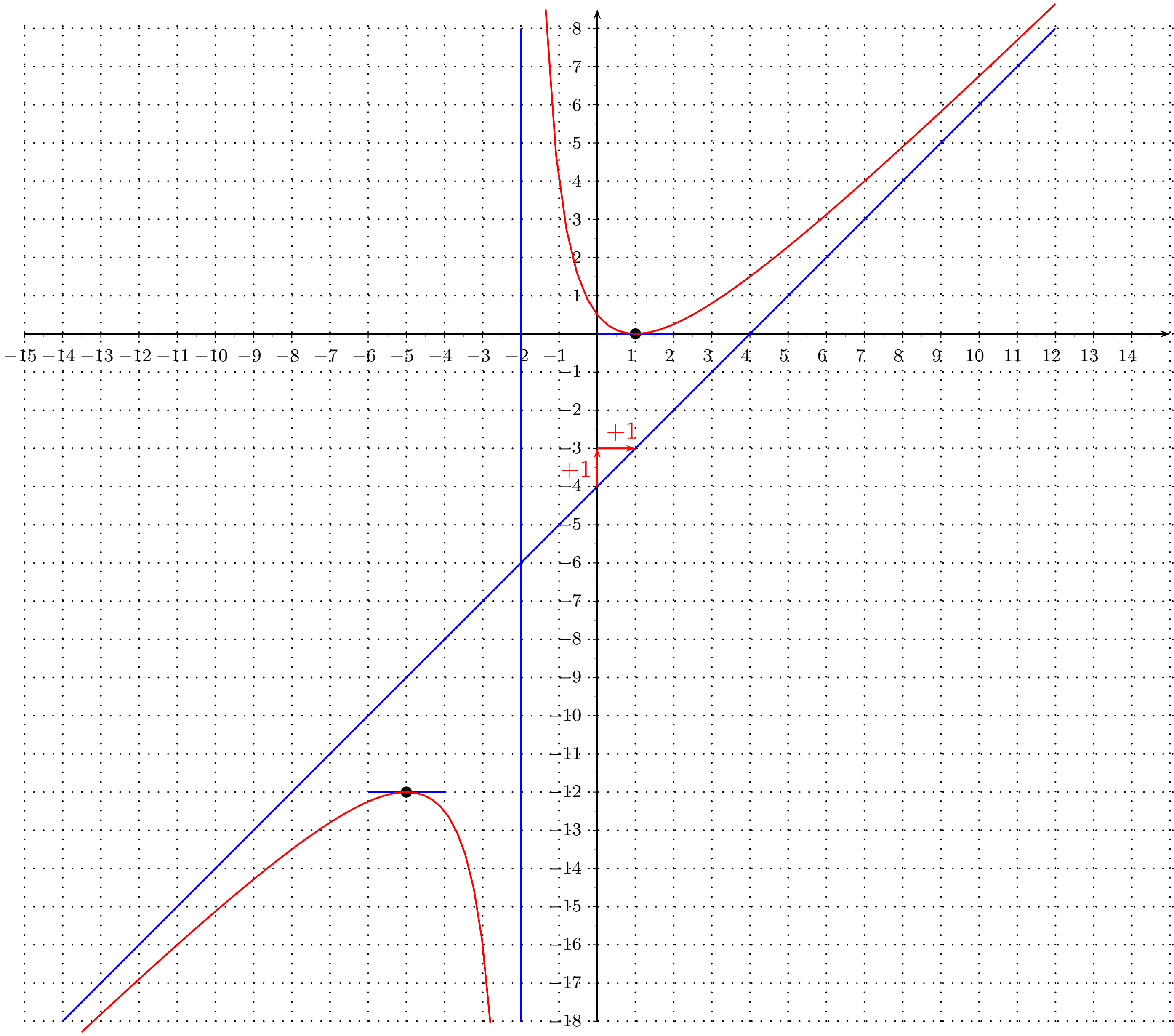
$f(-5) = \frac{25+10+1}{-5+2} = \frac{36}{-3} = -12$
$f(1) = \frac{1-2+1}{1+3} = 0$

(f) La droite tracée sur le graphique ci-dessous est asymptote à la courbe représentative de f en l'infini.

i. Déterminer l'équation de cette droite.
La droite coupe l'axe des ordonnées en -4, on a donc $b = -4$. Par lecture graphique, on a $a = 1$. Il s'agit de la droite d'équation $y = x - 4$.

ii. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur le graphique ci-dessous.
Comme -2 est une valeur interdite, on commence par tracer l'asymptote verticale d'équation $x = -2$.

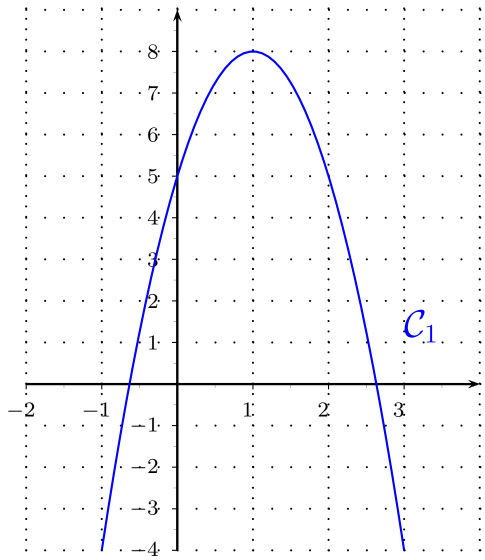
Comme $f(-5) = -12$ et $f(1) = 0$, on place le point de coordonnée $(-5; -12)$ et $(1; 0)$. La dérivée s'annulant en -5 et 1, il y a en ces points une tangente horizontale.
On trace l'allure en s'aidant des asymptotes et en respectant les limites trouvées dans le tableau.

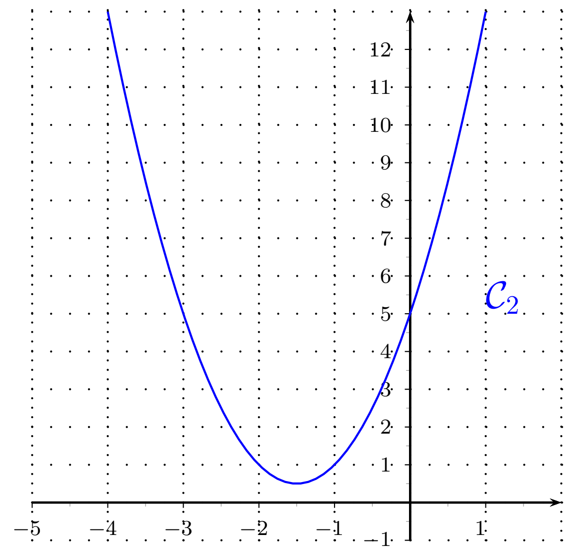


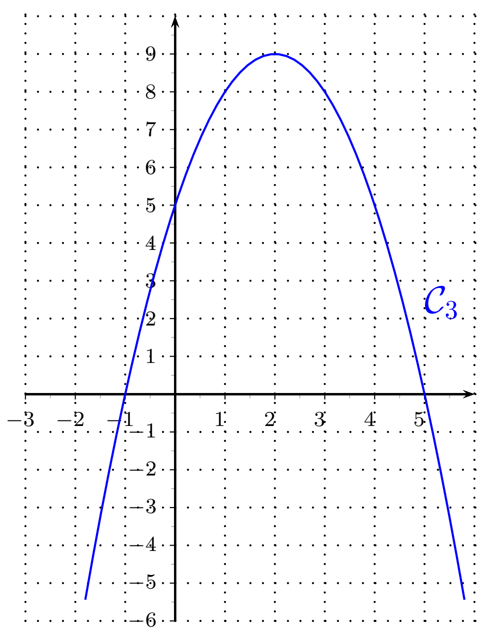
Exercice 4

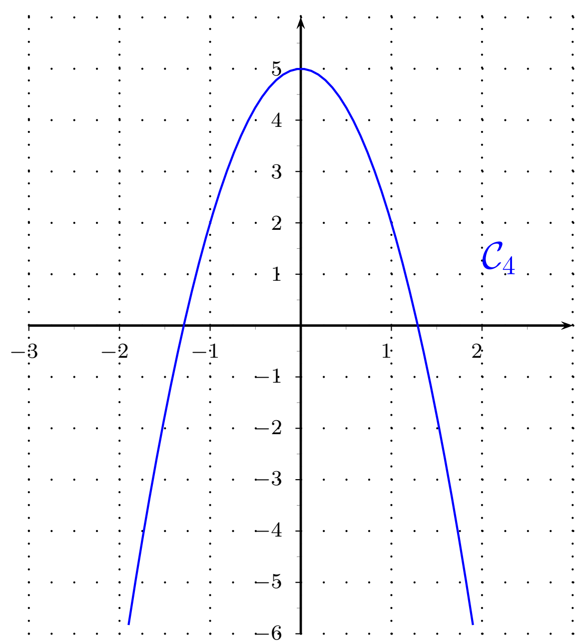
On considère la fonction $f(x) = -3x^2 + 5$.

1. Parmi les courbes suivantes, indiquer celle qui correspond à la représentation graphique de f :









On étudie les variations de f. La dérivée de f est $f'(x) = -6x$, on a alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f est représentée par la courbe $\mathcal{C}_4$.

2. Déterminer l'image de 3.

$$f(3) = -3 \times 9 + 5 = -22$$

3. Déterminer le(s) antécédent(s) de -31.
   On cherche les valeurs de x telles que $f(x) = -31$.

$$-3x^2 + 5 = -31 \Leftrightarrow -3x^2 = -36 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$$

4. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0;3[$.
   La fonction f est décroissante sur $[0;3[$, on a alors :

$$f([0;3[) =]f(3);f(0)] =]-22;5]$$

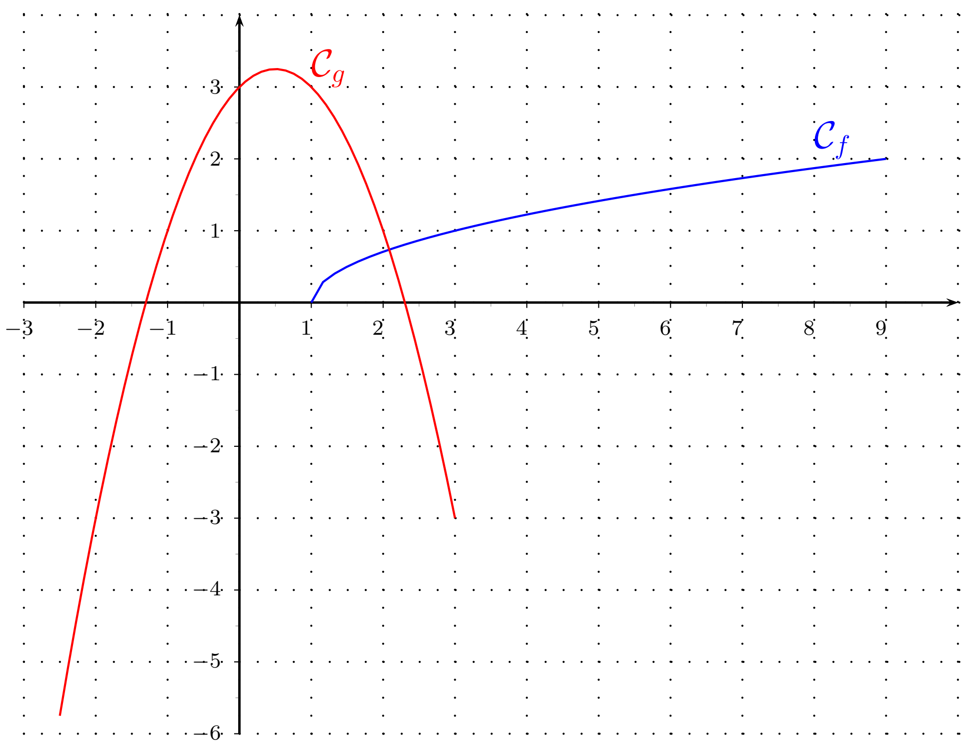
5. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-1;+\infty[$.
   La fonction f est croissante sur $]-1;0]$ puis décroissante sur $[0;+\infty[$, on a alors :

$$f(]-1;+\infty[) = f([0;+\infty[) =]-\infty;5]$$

Exercice 5

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère les représentations graphiques des fonctions f et g suivantes :



   Déterminer, si possible, les valeurs de :

   (a) $f \circ g(-1)$
   On lit $g(-1) = 1$ et $f \circ g(-1) = f\left(g(-1)\right) = f(1) = 0$.

(b) $g \circ f(-1)$
Impossible car f n'est pas définie en -1.

(c) $g \circ g(1)$
On lit $g(1) = 3$ et $g \circ g(1) = g(g(1)) = g(3) = -3$.

2. On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \quad g(x) = x^2 - x + 1$$

Donner les expressions des fonctions composées suivantes :

(a) $f \circ g$

$$f \circ g(x) = f\left(x^2 - x + 1\right) = \sqrt{2\left(x^2 - x + 1\right) + 1} = \sqrt{2x^2 - 2x + 3}$$

(b) $g \circ f$

$$g \circ f(x) = g\left(\sqrt{2x+1}\right) = \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 - \sqrt{2x+1} + 1 = 2(x+1) - \sqrt{2x+1}$$

(c) $g \circ g$

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g\left(x^2 - x + 1\right) = \left(x^2 - x + 1\right)^2 - \left(x^2 - x + 1\right) + 1 \\ &= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - x^2 + x - 1 + 1 \\ &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

3. Dans chaque cas, donner deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$ avec u et v différentes de l'identité.

(a) $f(x) = x^5 + 2$

$$u(x) = x^5 \quad \text{et} \quad v(x) = x + 2$$

(b) $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2+3)}$

$$u(x) = \ln(x^2 + 3) \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{x}$$