Nom : Prénom : Groupe :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 20 septembre 2019 - Durée : 1h30

Tout document et appareil électronique est interdit

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = e^{-x^3+x^2+x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle n'a pas de valeur interdite.

2. Déterminer la dérivée de f puis en déduire le sens de variation de f.
   On a
   $$f'(x) = (-3x^2+2x+1)e^{-x^3+x^2+x+1}$$
   Comme la fonction exponentielle est strictement positive, f' est du signe de $-3x^2+2x+1$.
   Les racines de ce polynôme sont $-\frac{1}{3}$ et 1. On obtient le tableau de variation suivant :

	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
$-3x^2+2x+1$		-		$+$		-	
f'		-		$+$		-	
variantions de f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} e^{-x^3+x^2+x+1}\\ &= \lim_{X\to+\infty} e^X\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} e^{-x^3+x^2+x+1}\\ &= \lim_{X\to-\infty} e^X\\ &= 0\end{aligned}$$

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f. (On indiquera les valeurs des limites trouvées à la question 3 ainsi que les valeurs de f aux changements de sens de variations)
   On calcule $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ et $f(1)$:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = e^{-\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)+1} = e^{\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+1} = e^{\frac{22}{27}}$$

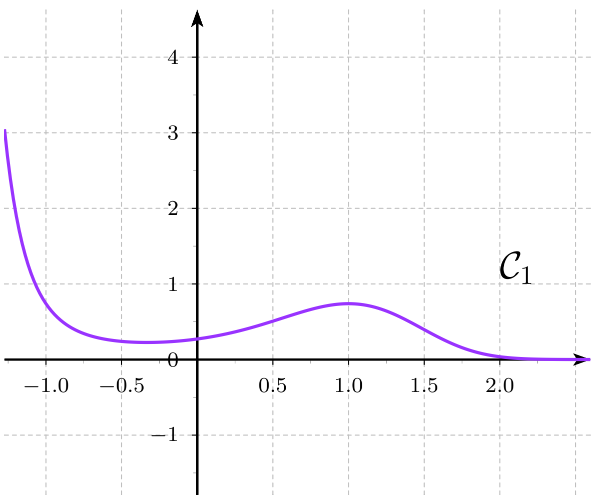
et

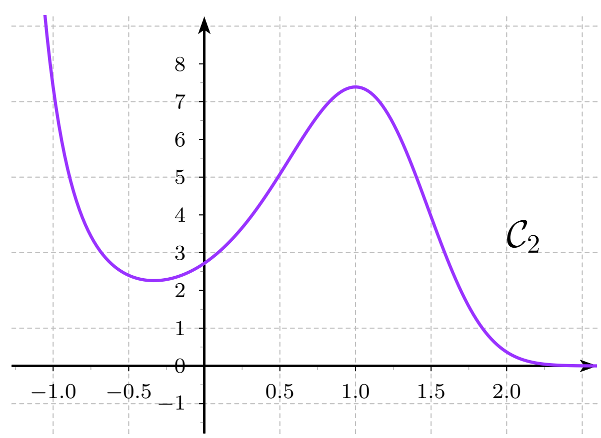
$$f(1) = e^{-1^3+1^2+1+1} = e^2$$

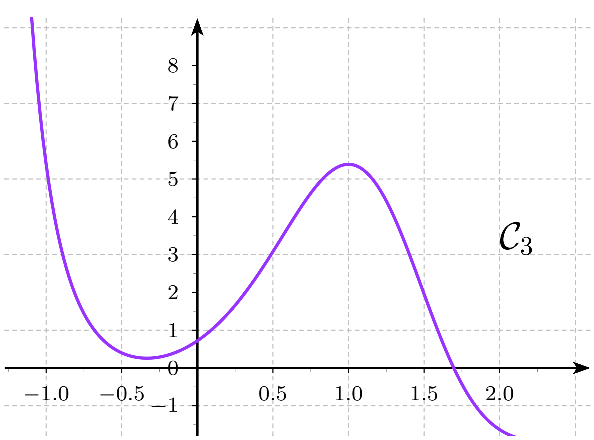
Donc le tableau de variation complet est

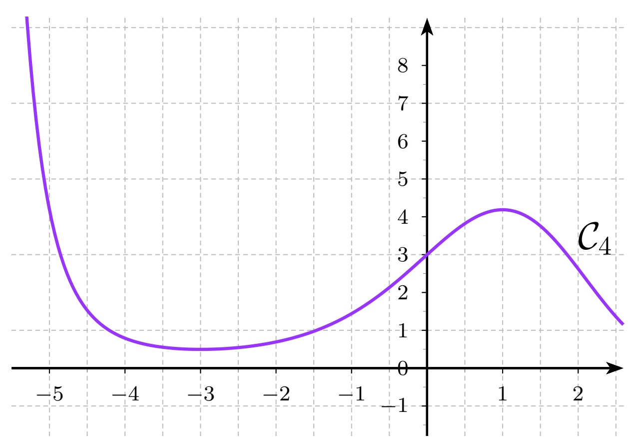
	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$-3x^2+2x+1$		-		+		-	
f'		-		+		-	
variantions de f	$+\infty$	$\searrow$	$e^{\frac{22}{27}}$	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	0

5. Parmi les courbes suivantes, indiquer celle qui correspond à la représentation graphique de f :
   La courbe $\mathcal{C}_1$, donne une valeur en 1 inférieure à 1 alors que $f(1) = e^2 > e > 2$: ce n'est pas la courbe de f.
   La courbe $\mathcal{C}_3$ passe sous l'axe des abscisses alors que f est toujours positive : ce n'est pas la courbe de f.
   La courbe $\mathcal{C}_4$ change de sens de variation en $x = -3$ alors que f' ne s'annule pas en -3 : ce n'est pas la courbe de f.
   La courbe représentative de f est la courbe $\mathcal{C}_2$.









Exercice 2

1. Sur le graphique ci-dessous, tracer (en expliquant les démarches) les représentations graphiques

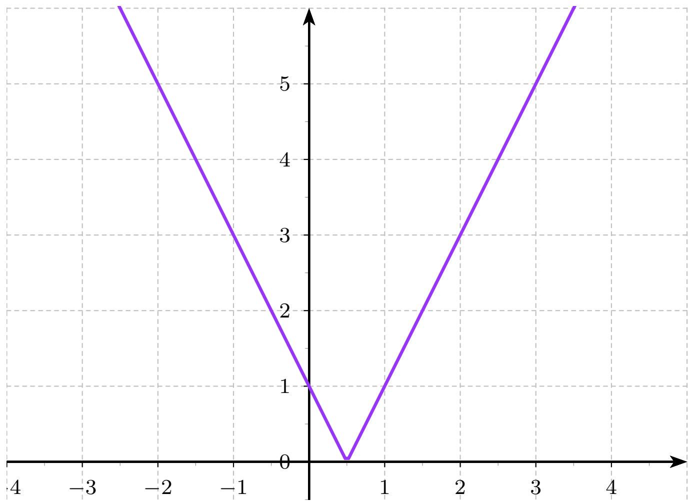
des fonctions f et g définies par

$$f(t) = |2t-1| \qquad \text{et} \qquad g(t) = |t+1| + |t-3|$$

Pour tracer f on peut écrire

$$f(t) = |2t-1| = \begin{cases} 2t-1 \text{ si } t \geq \frac{1}{2} \\ -2t+1 \text{ si } t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

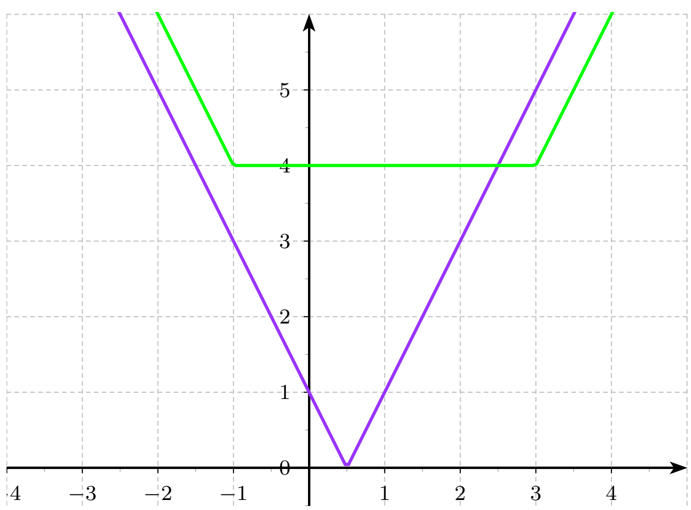
Donc la courbe de f est



Pour tracer g on fait un tableau qui récapitule tous les cas :

	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$\lvert t+1 \rvert$	$-t-1$	$t+1$	$t+1$	
$\lvert t-3 \rvert$	$-t+3$	$-t+3$	$t-3$	
$g(t)$	$-2t+2$	4	$2t-2$	

Donc la courbe de g (sur le même graphique que celle de f) est



2. Résoudre (par la méthode de votre choix) : $g(t) = 6$
   On peut résoudre graphiquement. On lit sur le graphique que les antécédents de 6 pour la fonction g sont : -2 et 4.

3. Résoudre graphiquement l'équation : $|2t-1| = |t+1| + |t-3|$
   On lit sur le graphique que l'abscisse du seul point d'intersection entre les courbes de f et de g est : 2,5.

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $|t^3| = -1$. Une valeur absolue ne peut pas être négative : il n'y a pas de solution.

2. $|3-2t| = 8$. On résout les deux équations $3-2t=8$ et $-3+2t=8$. On obtient $S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right\}$.

3. $|t^2-1| = 4$. On résout les deux équations $t^2-1=4$ et $-t^2+1=4$.
   L'équation $t^2-1=4$ a pour solutions $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.
   L'équation $-t^2+1=4$ n'a pas de solution réelle.
   Les solutions sont donc $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

4. $|t+5| < 3$. Cette inéquation s'interprète par : « distance entre t et -5 strictement inférieure à 3 ».
   Les solutions sont donc $S =]-8;-2[$.

5. $|t-117| > 19$. Cette inéquation s'interprète par : « distance entre t et 117 strictement supérieure à 19 ».
   Les solutions sont donc $S =]-\infty; 98[\cup]136; +\infty[$.

Exercice 4 Soient les fonctions f, g et h suivantes

$$f(x) = e^{x+1} \quad g(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3x} \quad h(x) = \frac{1}{3x-1}$$

1. Déterminer les fonctions $f \circ g$ et $h \circ f$.

$$f \circ g(x) = e^{g(x)+1} = e^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3x}+1} = e^{\frac{4}{3}+\frac{1}{3x}}$$

   et

$$h \circ f(x) = \frac{1}{3e^{x+1}-1}$$

2. Montrer que, pour tout $x \neq \frac{1}{3}$ on a : $g \circ h(x) = x$.

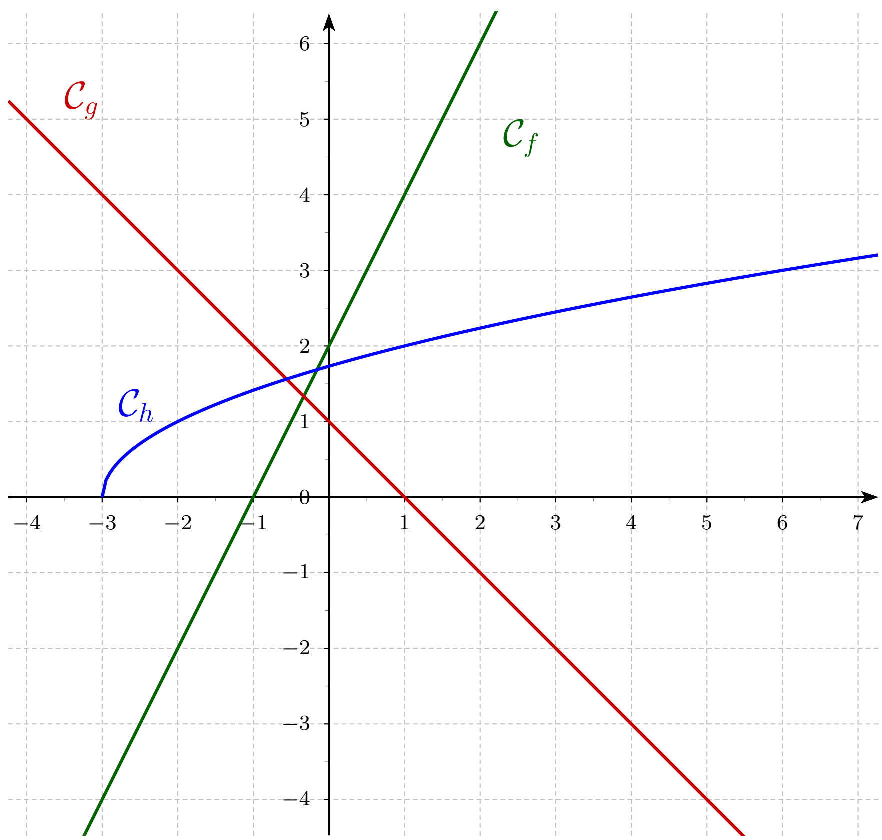
On a

$$\begin{aligned} g \circ h(x) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3h(x)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{3}{3x-1}} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{3x-1}{3} \\ &= \frac{1+3x-1}{3} \\ &= \frac{3x}{3} \\ &= x \end{aligned}$$

3. Déterminer deux fonctions u et v (qui ne soient pas la fonction identité) telles que $g(x) = v \circ u(x)$.
   On pose
$$v(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x \quad \text{et} \quad u(x) = \frac{1}{x}$$
4. Déterminer une fonction w telle que, pour tout $x > 0$, $f \circ w(x) = x$. On pose
$$w(x) = \ln(x) - 1$$
   Vérification :
$$f \circ w(x) = e^{w(x)+1} = e^{\ln(x)-1+1} = e^{\ln(x)} = x$$

Exercice 5

On considère les représentations graphiques des fonctions f, g et h suivantes :



Déterminer, si possible, les valeurs de

1. $f \circ g(1) = f(0) = 2$
2. $g \circ f(1) = g(4) = -3$
3. $h \circ f(-3) = h(-4)$ impossible car h n'est pas définie en -4.
4. $h \circ f \circ g(-1) = h \circ f(2) = h(6) = 3$
5. $f \circ f(-2) = f(-2) = -2$

Exercice 6

Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de définition et la dérivée :

1. $f(t) = \dfrac{t^3 - 1}{4}$.
   f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = \dfrac{3t^2}{4}$.

2. $g(t) = \ln(3t - 1)$.
   g est définie sur $\left]\frac{1}{3} + \infty\right[$ (car $\ln(X)$ existe si et seulement si $X > 0$), et $g'(t) = \dfrac{3}{3t - 1}$.

3. $h(t) = \dfrac{1}{t^2 + 2t + 1}$.
   h est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ (car -1 est la seule racine du dénominateur) et $h'(t) = -\dfrac{2t + 2}{(t^2 + 2t + 1)^2} = -\dfrac{2(t + 1)}{(t + 1)^4} = -\dfrac{2}{(t + 1)^3}$.

4. $k(t) = \cos(t^2)$.
   k est définie sur $\mathbb{R}$ et $k'(t) = -2t \sin(t^2)$.