Nom : Groupe :
Prénom :

Mathématiques - Devoir Surveillé 1
Vendredi 22 septembre 2017 - Durée : 1h30
Sujet 1, 2, 3 et 4

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit f la fonction définie par :

$$f(t) = \ln(t+3) - \ln(3t-2)$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$.
   Il faut que $t+3 > 0$ et que $3t-2 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{2}{3}$.
   Pour que les deux ln soient bien définis il faut garder la contrainte la plus forte : $t > \frac{2}{3}$.
2. Déterminer la dérivée de f.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{t+3} - \frac{3}{3t-2} \\ &= \frac{3t-2-3t-9}{(t+3)(3t-2)} \\ &= \frac{-11}{(t+3)(3t-2)} \end{aligned}$$

3. Déterminer les limites $\lim\limits_{\substack{t \to \frac{2}{3} \\ t > \frac{2}{3}}} f(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

$$\lim_{\substack{t \to \frac{2}{3} \\ t > \frac{2}{3}}} \ln(t+3) = \ln(11/3) \text{ et } \lim_{\substack{t \to \frac{2}{3} \\ t > \frac{2}{3}}} \ln(3t-2) = +\infty$$

   Donc, par addition,

$$\lim_{\substack{t \to \frac{2}{3} \\ t > \frac{2}{3}}} f(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \ln(t+3) - \ln(3t-2) = \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{t+3}{3t-2}\right) = \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{t}{3t}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

t	$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'		-	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2/3)$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = -t^3 + t^2 + t + 1$$

1. Déterminer la dérivée de f.

$$f'(t) = -3t^2 + 2t + 1$$

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = \lim_{t \to -\infty} -t^3 = +\infty$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} -t^3 = -\infty$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On étudie le signe de la dérivée. C'est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 16$ et de racines $t_1 = -\frac{1}{3}$ et $t_2 = 1$. Le coefficient de t^2 est négatif donc :

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		-		$+$		-	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
La formule pour déterminer l'équation de la tangente en a est $y = f'(a)(t-a) + f(a)$.
Donc la tangente en 0 a pour équation

$$y = t + 1$$

Exercice 3 Répondre par Vrai ou Faux sans justifier.

Sujet 1

1. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ **VRAI**
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ **VRAI**
3. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ **VRAI**
4. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ **VRAI**

Sujet 2

1. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ **FAUX**
2. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ **FAUX**
3. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ **VRAI**
4. $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ **VRAI**

Sujet 3

1. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ **FAUX**
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$ **FAUX**
3. $\cos(\pi - x) = \cos(x)$ **FAUX**
4. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ **FAUX**

Sujet 4

1. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ **FAUX**

2. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ **VRAI**
3. $\sin(\pi - x) = -\sin(x)$ **FAUX**
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ **VRAI**

Exercice 4 Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Donner la mesure principale des angles suivants.
   (a) $-\dfrac{77\pi}{4} = -\dfrac{80\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = 20\pi + \dfrac{3\pi}{4}$.
   Donc la mesure principale est $\dfrac{3\pi}{4}$.
   (b) $\dfrac{769\pi}{6} = \dfrac{600\pi}{6} + \dfrac{168\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = 100\pi + 28\pi + \dfrac{\pi}{6}$.
   Donc la mesure principale est $\dfrac{\pi}{6}$.
2. Donner les valeurs de
   (a) $\cos\left(\dfrac{-7\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   (b) $\sin\left(\dfrac{11\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (c) $\tan\left(\dfrac{19\pi}{6}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 5 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$
2. $g(t) = \dfrac{1-3}{5t+2} \Rightarrow g'(t) = \dfrac{-11}{(5t+2)^2}$
3. $h(x) = (2x+1)e^{3x} \Rightarrow h'(x) = (6x+5)e^{3x}$
4. $m(t) = \sqrt{3t^2+1} \Rightarrow m'(t) = \dfrac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}$

Exercice 6 Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes

1. Résoudre l'équation $|x+1| - 3|2-x| = -5$.
   Le tableau ci-dessous résume le comportement de chacune des 2 valeurs absolues de l'équation :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$	$2-x$	$-x+x$	

Ainsi, on peut traîter 3 cas :
• Si $x \leq -1$, alors on résout $-x-1-3(2-x) = -5$ donc la solution est $x = 1$.
Mais 1 n'est pas dans l'intervalle d'étude !
Ce n'est donc pas une solution de l'équation.

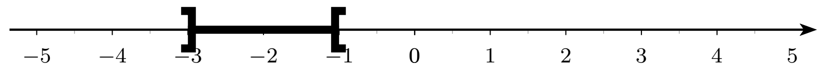
• Si $-1 < x \leq 2$, alors on résout $x+1-3(2-x) = -5$ donc la solution est $x = 0$.

• Si $2 < x$, alors on résout $x+1-3(-2+x) = -5$ donc la solution est $x = 6$.

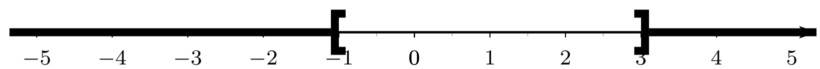
L'équation admet donc 2 solutions :

$$S = \{0; 6\}$$

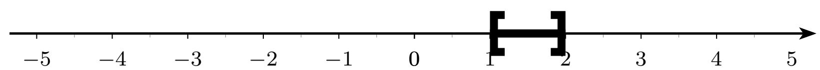
2. Pour chaque question, repésenter sur l'axe gradué, les valeurs de x qui vérifent la relation.
   (a) $|x+2| < 1$



   (b) $|x-1| > 2$



   (c) $|2x-3| \leq 1$



3. Écrire les conditions suivantes en utilisant une valeur absolue (ex : $0 < x < 6$ s'écrit $|x-3| < 3$)
   (a) $1 \leq x \leq 9$ s'écrit $|x-5| \leq 4$.
   (b) $-2 \leq x \leq 5,5$ s'écrit $\left|x - \frac{7}{4}\right| \leq \frac{15}{4}$