Nom : Groupe :
Prénom :

Mathématiques - Correction devoir Surveillé 1
Vendredi 7 octobre Septembre 2016

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

1. Justifier l'ensemble de définition de la fonction f.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 > 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   On a $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

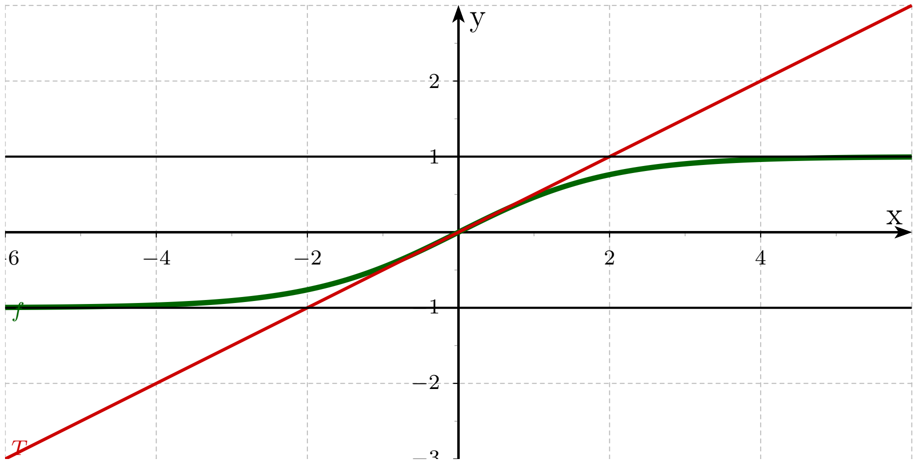
	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
Δf		$\nearrow$	

3. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{-1}{1}$. Pour la limite en $+\infty$, on écrit f sous la forme :

$$f(x) = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

   On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

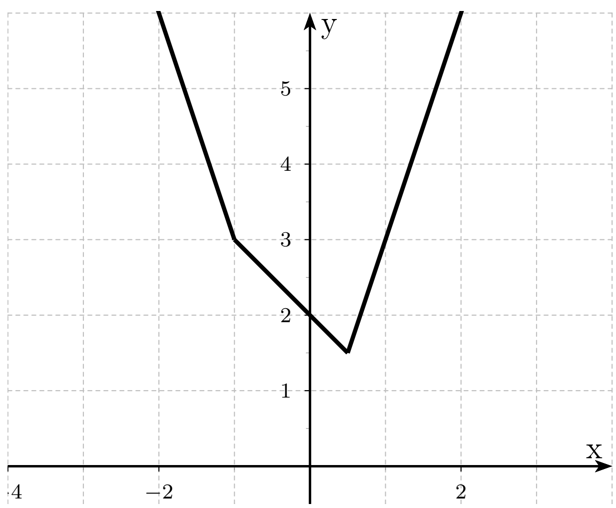
   (b) En déduire les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   On en déduit est la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
4. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   L'équation de la tangente en 0 est : $y = f'(0)x + f(0) = \dfrac{x}{2}$.
5. Construire sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que la tangente (T) et les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.



Exercice 2 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
   (a) $|3-2x| = 4 \Leftrightarrow 3-2x = 4$ ou $-(3-2x) = 4 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = \dfrac{7}{2}$,
   (b) $|x+1| = -1$ est IMPOSSIBLE car une valeur absolue est toujours positive,
   (c) $|x+1| \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq x+1 \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leq x \leq -\dfrac{1}{2}$,
   (d) $|x| > 3 \Leftrightarrow x > 3$ ou $x < -3$.
2. Représenter sur le graphique ci-dessous la fonction $f(x) = |x+1|+|1-2x|$. Justifier votre réponse.

	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-1-x$	$1+x$	$1+x$	
$\lvert 1-2x\rvert$	$1-2x$	$1-2x$	$2x-1$	
$\lvert x+1\rvert+\lvert 1-2x\rvert$	$-3x$	$2-x$	$3x$	



Exercice 3

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Rappeler la formule de $\cos(a+b)$.
   On a $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
2. Montrer que $\cos(x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x)$.
   On a
   $$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$

et
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$
D'où $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b)+\cos(a-b)$. Il suffit d'appliquer la formule précédente avec $a = 2x$ et $b = x$ pour obtenir $\cos(x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.
On a (en utilisant notamment le résultat de la question précédente) :

$$\begin{aligned}\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) &= \cos(x) + \cos(3x) + \cos(2x)\\ &= 2\cos(2x)\cos(x) + \cos(2x) = \cos(2x)(2\cos(x) + 1).\end{aligned}$$

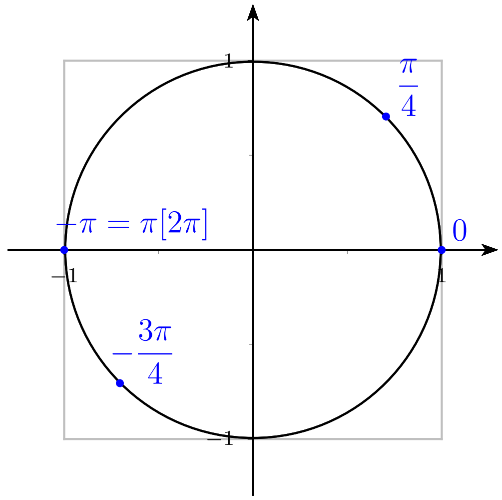
On s'est donc ramené à résoudre l'équation :

$$\cos(2x)(2\cos(x) + 1) = 0.$$

Un produit est nul si l'un au moins de ces facteurs est nul. D'où :
$$\begin{array}{lll}\cos(2x) = 0 & \text{ou} & 2\cos(x)+1 = 0,\\ \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, & \text{ou} & \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2},\\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. & \text{ou} & \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.\end{array}$$
D'où
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi;\ -\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 4

1. Mettre $\sin(2t) + \cos(2t)$ sous la forme $A\sin(2t + \varphi)$, avec $A > 0$.
Pour information, il s'agit de la question 1) de l'exercice 3 de la feuille de soutien 3. En appliquant les formules du cours, on trouve $\sin(2t) + \cos(2t) = \sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2t) + \cos(2t) = 1$.
Pour information, il s'agit de la question 1) de l'exercice 4 de la feuille de soutien 3. D'après la question précédente, on a $\sin(2t) + \cos(2t) = \sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$. On est donc ramené à résoudre l'équation trigonométrique suivante :
$$\sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
c'est-à-dire :
$$2t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow t = k\pi \quad \text{ou} \quad 2t + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$
D'où
$$\mathcal{S} = \left\{k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
3. Donner les solutions de l'équation précédente appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
Les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont :
$$\left\{-\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi\right\}.$$



Exercice 5 On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Traduire en français les phrases mathématiques suivantes (répondre sur le sujet) :
   (a) $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A,$
   Il existe une constante A appartenant à $\mathbb{R}$ (indépendante de x) tel que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x)$ est inférieur ou égal à A.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A,$
   Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, il existe une constante A (qui peut dépendre de x) appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $f(x)$ est inférieur ou égal à A.
   (c) $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < A.$
   Pour toute constante A appartenant à $\mathbb{R}$, il existe x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $f(x)$ est strictement inférieur à A.
2. Donner la négation des assertions suivantes (répondre sur le sujet) :
   (a) $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A,$
   $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > A.$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A,$
   $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R},\ f(x) > A.$
   (c) $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < A.$
   $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq A.$
3. Relier les deux colonnes du tableau suivant (répondre sur le sujet) :

$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A$	$\Leftrightarrow$	f est majorée.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A$	$\Leftrightarrow$	Aucune condition n'est imposée à la fonction f.
$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < A$	$\Leftrightarrow$	f n'est pas minorée.

4. Donner dans chacun des cas de la question 1. (a), (b) et (c) un exemple de fonction vérifiant la propriété.
   La fonction cosinus est majorée par 1 et la fonction $\ln(x)$ n'est pas minorée (elle tend vers $-\infty$ en 0^+).