Mathématiques - Devoir Surveillé 1 - Correction
Vendredi 9 octobre Septembre 2015 - Durée : 2h00

Tous documents et appareils électroniques sont interdits

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation.

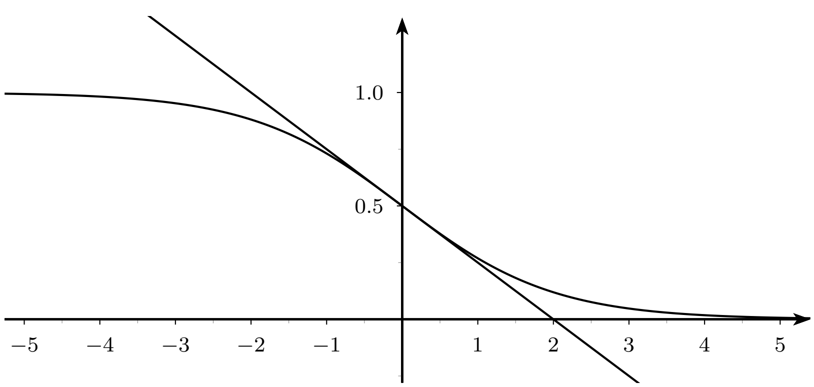
Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

1. Pour tout x réel : $1 + e^x > 0$, donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.
2. La fonction dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$.
3. Pour tout x réel : $e^x > 0$, donc la dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. Sachant que la fonction exponentielle tend vers 0 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$, on obitent facilement (il n'y a pas de forme indéterminée) que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
5. L'équation de T, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est

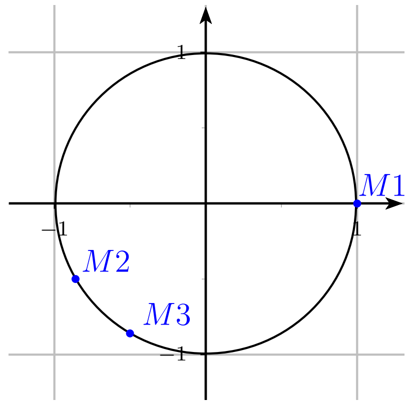
$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6. Tracons T et la courbe représentative de f :



Exercice 2

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les points M_1, M_2 et M_3 tels qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_i})$ soit $\dfrac{24\pi}{4}$, $-\dfrac{29\pi}{6}$ et $\dfrac{1234\pi}{3}$.



2. Donner les valeurs exactes des nombres suivants :

(a) $\cos\left(\dfrac{35\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{32\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sin\left(\dfrac{-35\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{-36\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

(c)

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{1234\pi}{3}\right) &= \tan\left(\frac{1200\pi}{3} + \frac{30\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les phrases suivantes :

(a) «Les courbes de f et g ne se croisent pas sur $\mathbb{R}$» s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq g(x)$.

(b) «f n'est pas la fonction constante égale à 1» s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}\ \ t.q.\ \ f(x) \neq 1$.

(c) «f est comprise entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}$» s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$.

2. Répondre par vrai ou faux (en justifiant) :

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 1$ est FAUX. Contre exemple : pour $x = 0$ il n'est pas possible de trouver y tel que $xy = 1$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ (\cos(x)+\sin(x))^2-1=\sin(2x)$ est VRAI. Preuve :

$$(\cos(x)+\sin(x))^2-1=\cos^2(x)+2\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)-1$$

Or $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, donc

$$(\cos(x)+\sin(x))^2-1=2\cos(x)\sin(x)$$

Or $2\cos(x)\sin(x)=\sin(2x)$, donc on a bien

$$(\cos(x)+\sin(x))^2-1=\sin(2x)$$

(c) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2-1=-2$ est FAUX car le carré d'un nombre réel ne peut pas être négatif.

(d) Soit n un nombre entier. On a : n n'est pas multiple de 9 $\Rightarrow$ n n'est pas multiple de 3 est FAUX.
Notons P la propriété «n n'est pas multiple de 9» et Q la propriété «n n'est pas multiple de 3».
Pour $n=6$ la propriété P est vraie mais la propriété Q est fausse.
Donc P ne peut pas impliquer Q.

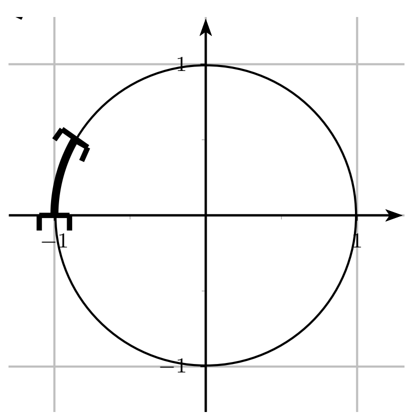
Remarque : il est possible d'écrire la contraposée de $P \Rightarrow Q$ pour se convaincre plus facilement que l'implication est fausse.

Exercice 4

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Les solutions du système suivant sont représenté en gras sur le cercle trigonométrique :

$$\begin{cases} \cos(x) \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) > 0 \end{cases}$$



Les solutions du système appartenant à l'intervalle $[0;2\pi]$ sont

$$S=\left]\frac{5\pi}{6};\pi\right]$$

2. $f(t) = -2\sin(3t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$ avec $a = 0$ et $b = -2$.
   On pose $A = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$
   et φ l'angle tel que $\cos(\varphi) = a/A = 0$ et $\sin(\varphi) = b/A = -1$, donc $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.
   Donc on peut écrire $f(t) = 2\cos\left(3t - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Donner toutes les solutions sur $[0; \pi]$ de $\cos(4x) = 0$:

$$\begin{aligned}\cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

   Les solutions entre 0 et π (inclus) sont :

$$S = \left\{\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right\}$$

4. Pour trouver les solutions de : $\sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t) = 1$, on écrit le terme de droite sous la forme $A\cos(2t - \varphi)$.
   On pose $A = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{-1}{2}$ donc $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.
   On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned}2\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad ou \quad \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 2t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ou \quad 2t + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad ou \quad t = -\frac{\pi}{4} + k\pi\end{aligned}$$

   où k est un entier relatif. Les solutions sont donc :

$$S = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

5. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   <u>méthode 1 :</u>

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

   <u>méthode 2 :</u> On sait que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$. On utilise la formule pour

$a = \dfrac{\pi}{12}$:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}
\end{aligned}$$

Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ est positif, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}}$.

6. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(x+\pi) + \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$:

$$\begin{aligned}
& \sin(x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x+\pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\
= \ & \sin(x) - \cos(x) - \sin(x) + \cos(x) \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

Exercice 5 Soit n un entier et soit la propriété $P_n : \cos(n\pi) = (-1)^n$.

1. $\cos((n+1)\pi) = \cos(n\pi + \pi)$, or $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ donc $\cos((n+1)\pi) = -\cos(n\pi)$.
2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n est vraie.
   <u>Initialisation :</u> pour $n = 0$, $\cos(0\times\pi) = \cos(0) = 1$ et $(-1)^0 = 1$ donc P_0 est vraie.

   <u>Hérédité :</u> Supposons que P_n est vraie : $\cos(n\pi) = (-1)^n$; Montrons que P_{n+1} est vraie : $\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\cos((n+1)\pi) &= -\cos(n\pi) \quad (\text{ d'après la question 1}) \\
&= -(-1)^n \quad (\text{ d'après l'hypothèse de récurrence}) \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

   Donc P_{n+1} est vraie.

   <u>Conclusion :</u> P_0 est vraie, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.