

# Physique Numérique – TP3

## Loi de Fourier de la diffusion de la chaleur

Victor Lanvin

### 1 Introduction

Dans ce TP, on s'intéresse au calcul de la distribution de température (en régime stationnaire) dans divers objets bidimensionnels. On utilise pour cela la méthode itérative de Gauss-Seidel.

On s'intéresse d'abord à une plaque simple, sans sources de chaleur, puis avec des sources ponctuelles et des "trous" correspondant à des thermostats.

On peut ensuite étendre ce modèle pour simuler (simplement) un joint de culasse, avec diverses sources de chaleur (positives ou négatives) et thermostats.

### 2 Question 3

**Sans apport de chaleur.** On a d'abord fait cette question avec  $\epsilon = 10^{-3}$ . La figure obtenue avec ce paramètre est présentée en fig 1. Sachant que le système présente deux axes de symétrie (verticale et horizontale) et deux axes d'anti-symétrie (les diagonales), on devrait nécessairement obtenir  $T = 0.5$  sur les diagonales. Or ce n'est pas le cas.

Après avoir augmenté le paramètre  $\epsilon$  à  $10^{-5}$ , on obtient la répartition présentée en fig 2. Cette répartition semble bien plus proche de la répartition attendue. En particulier, les valeurs aux diagonales sont (approximativement)  $T = 0.5$ . Le problème venait donc du paramètre  $\epsilon$ , choisi de manière arbitraire.

On peut aussi tracer les courbes de niveau pour la répartition obtenue (comme présenté en figure 3, pour  $\epsilon = 10^{-8}$ ). Cette représentation permet de rendre compte plus précisément des symétries. On remarque tout de même que la solution obtenue n'est pas encore parfaite : il faudrait encore diminuer le paramètre  $\epsilon$  mais cela augmente considérablement le temps de calcul, pour une amélioration du résultat de plus en plus faible.

**Etude de la convergence.** On s'intéresse ici à la vitesse de convergence de l'algorithme en fonction de la solution initiale.

Premièrement, on s'intéresse aux solutions initiales constantes. On a représenté en figure 4 l'évolution du nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme (pour  $\epsilon = 10^{-7}$ ) en fonction de la valeur constante initiale. On remarque que l'algorithme est considérablement plus rapide (près de 75%) pour une température initiale uniforme de 0.5, qui est la valeur moyenne de la répartition de température finale attendue.

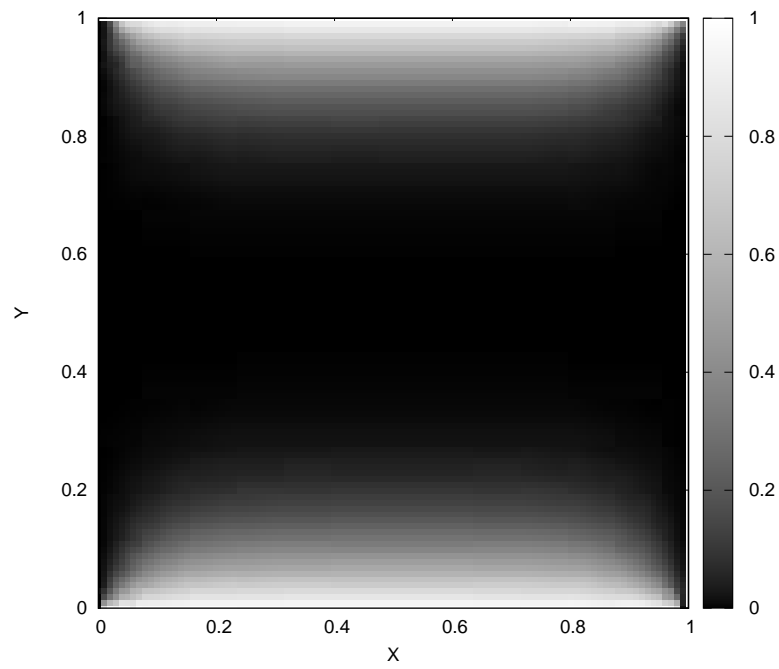
Deuxièmement, on a essayé d'utiliser un ersatz correct de solution comme répartition initiale. Pour cela, on a utilisé la fonction suivante (translatée et redimensionnée pour respecter les conditions aux bords) :

$$\text{Im} \left( \text{Arctan} \left[ ((x+y) + i(x-y))^2 \right] \right)$$

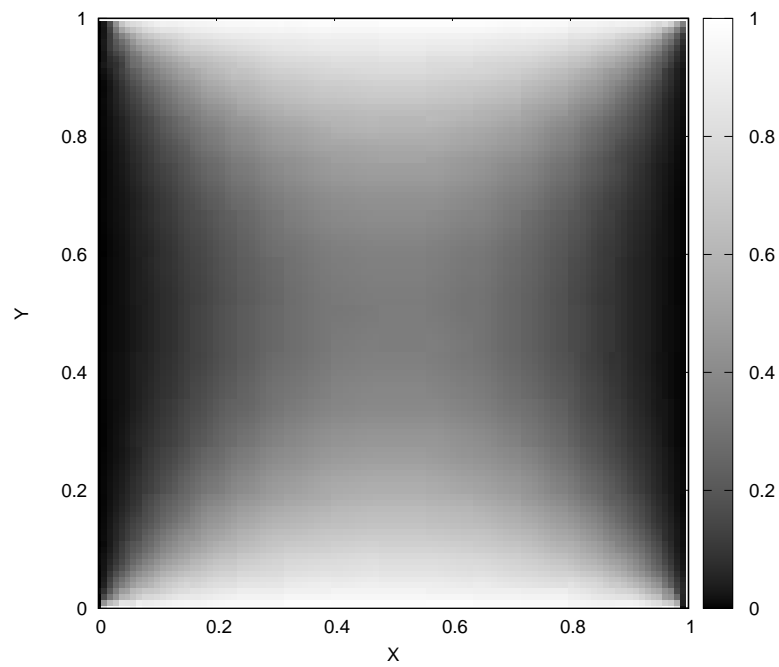
Avec cette fonction, l'algorithme converge en 2114 itérations, contre 2717 pour une solution initiale uniforme de 0.5, soit 22% plus rapidement, ce qui est un gain non négligeable.

**Ajout d'une source de chaleur ponctuelle.** On ajoute maintenant une source de chaleur ponctuelle, puis on trace la répartition de température ainsi que le champ de vecteur correspondant à son gradient. Le résultat obtenu est présenté en figure 5.

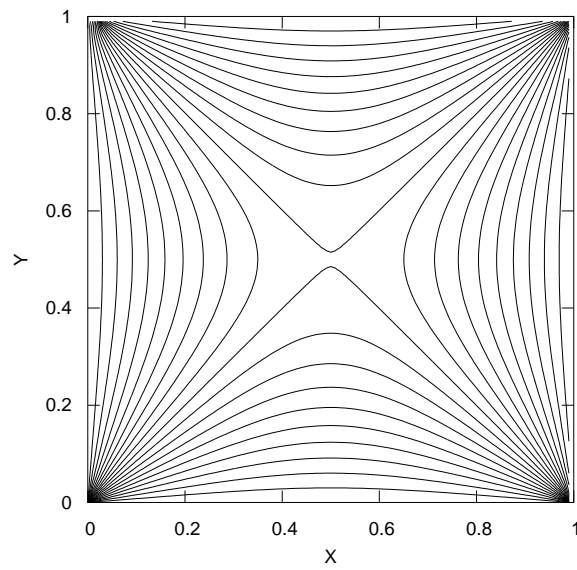
On remarque le gradient sortant (divergence) de la source et dirigé préférentiellement vers les températures faibles. Loin de la source, la répartition de température et son gradient ne sont que peu affectés.



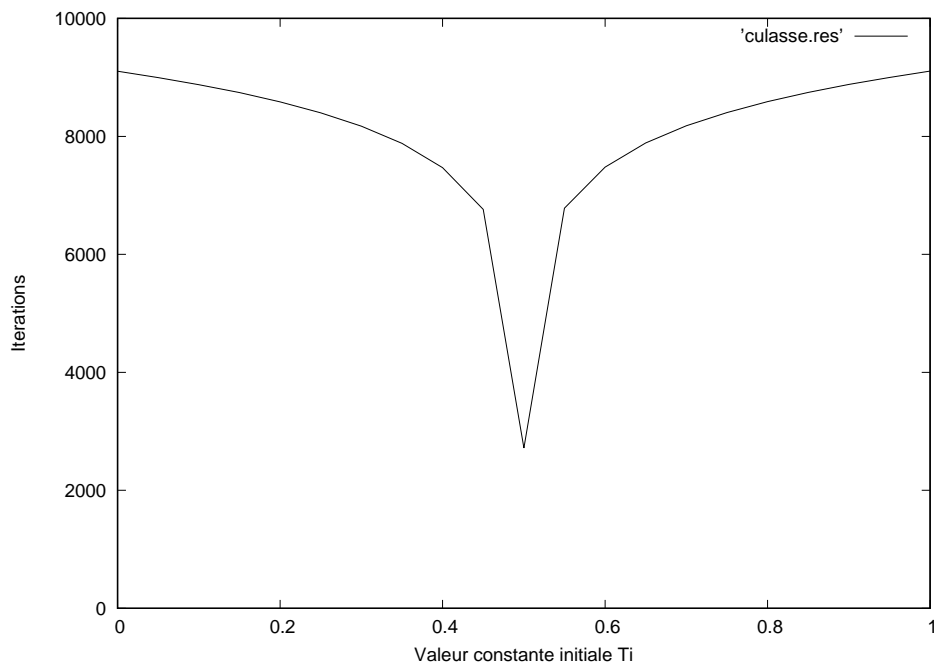
**Figure 1:** Répartition de la température obtenue pour  $\epsilon = 10^{-3}$



**Figure 2:** Répartition de la température obtenue pour  $\epsilon = 10^{-5}$



**Figure 3:** Courbes de niveau de la répartition de température pour  $\epsilon = 10^{-8}$



**Figure 4:** Nombre d'itérations en fonction de la solution constante initiale, pour  $\epsilon = 10^{-7}$

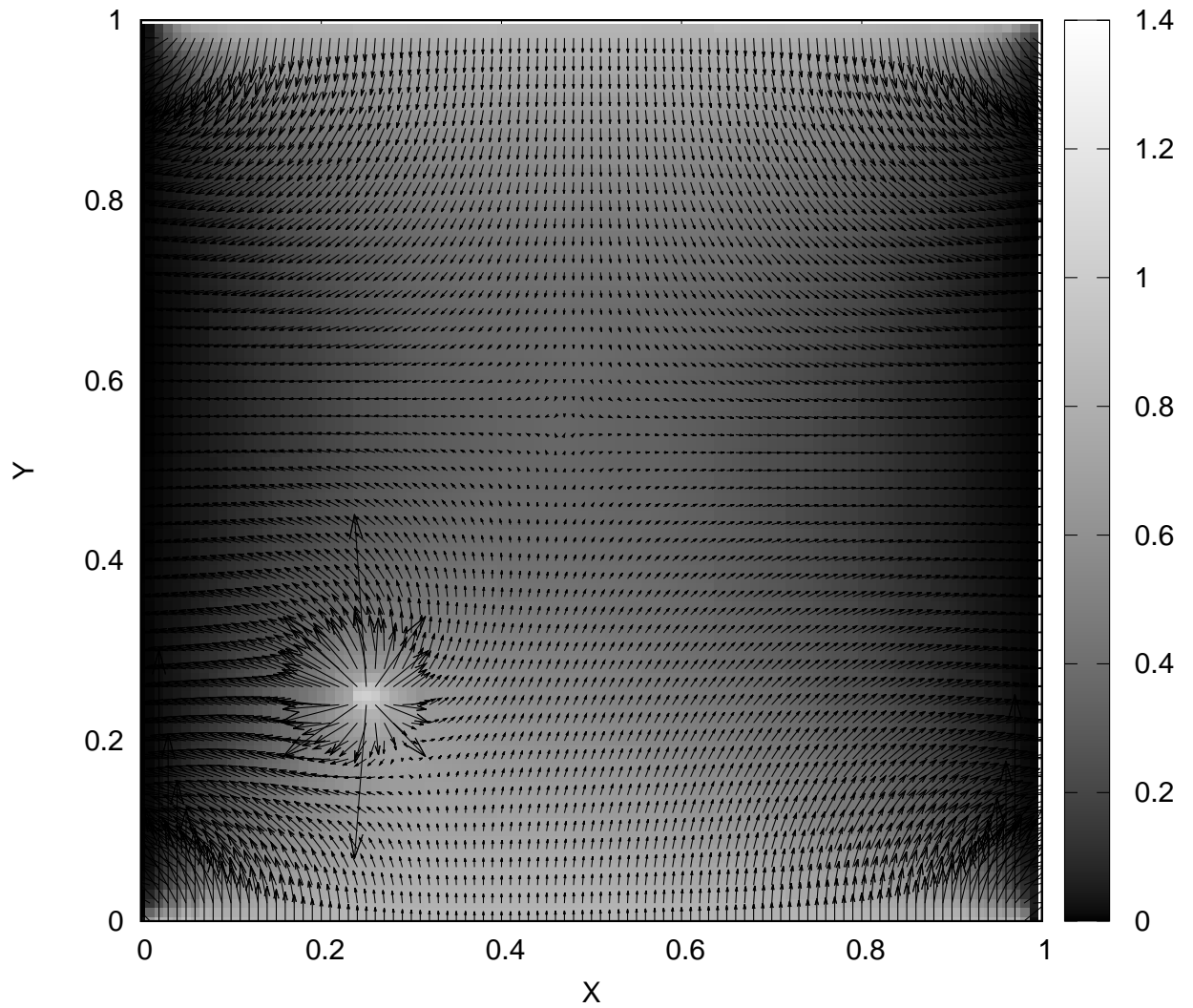


Figure 5: Répartition et champ de vecteur de la température, pour  $\epsilon = 10^{-5}$  et source en  $(0.25, 0.25)$

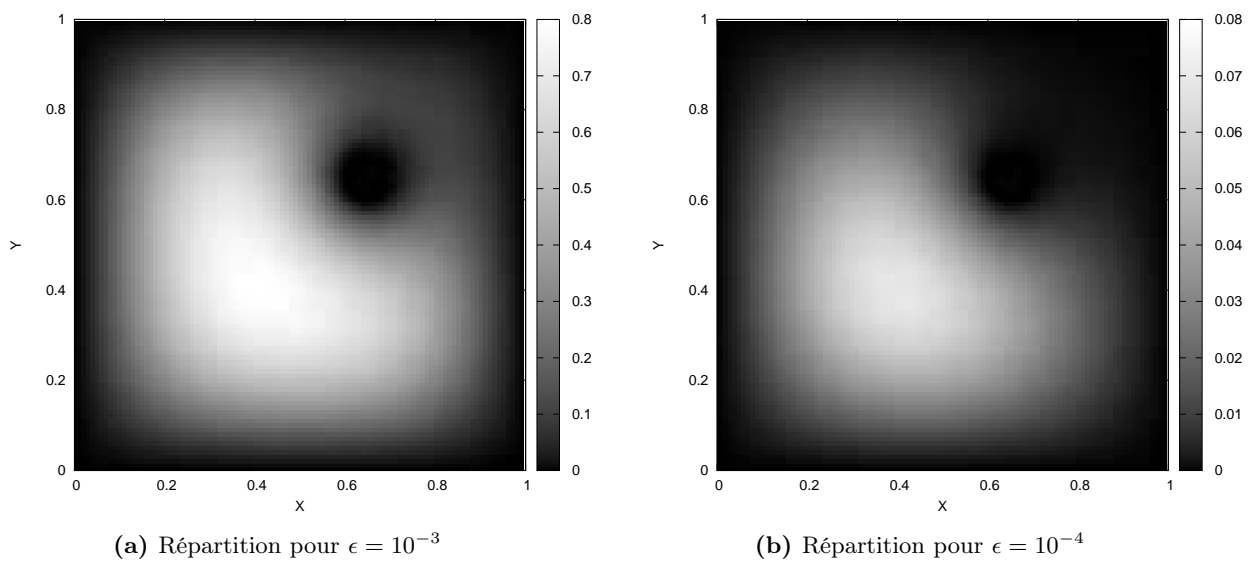
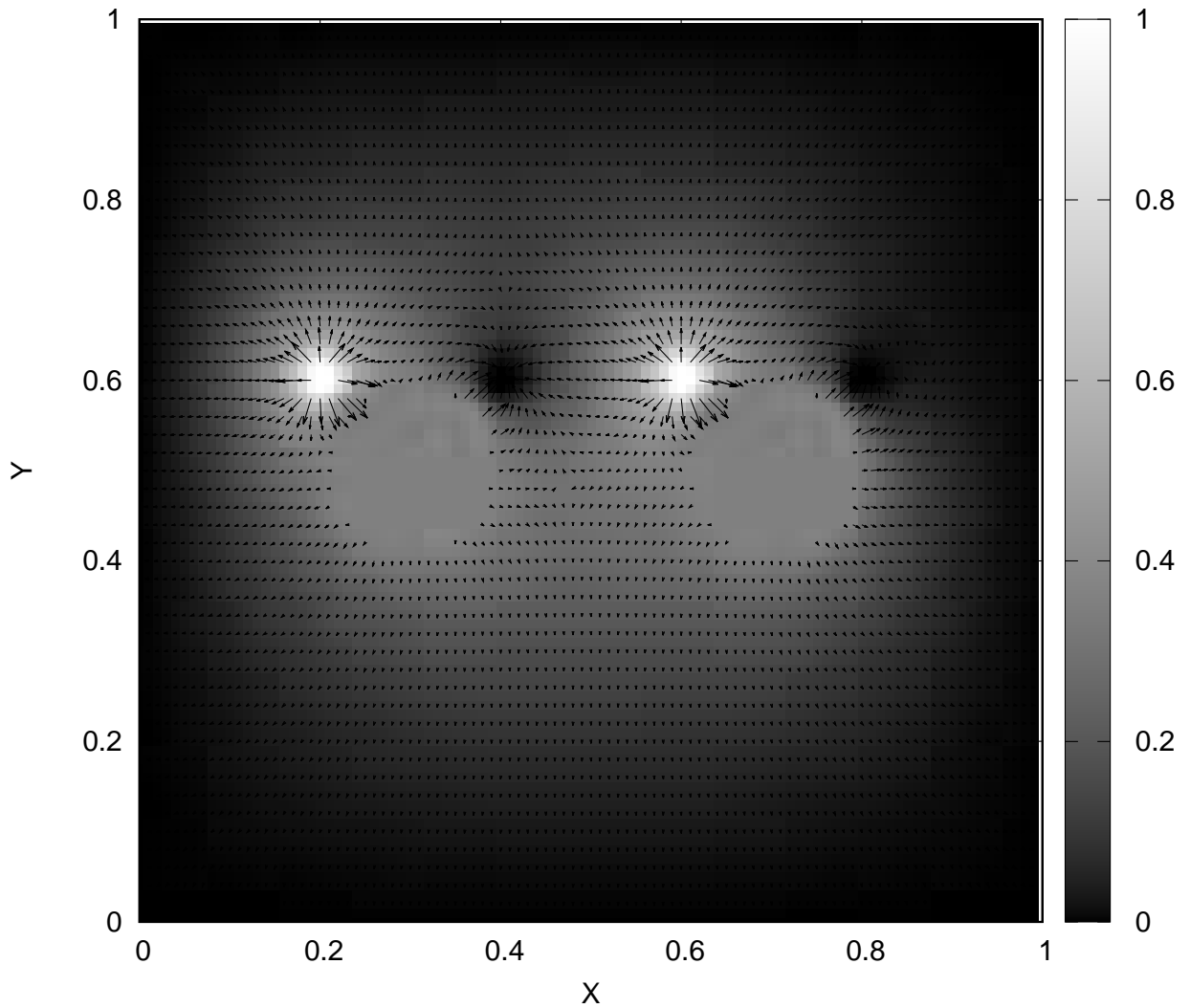


Figure 6: Répartition de la température pour un trou en  $(0.65, 0.65)$



**Figure 7:** Répartition et champ de vecteur de la température, pour  $\epsilon = 10^{-5}$  avec deux pistons et guides soupape

**Ajout de trous.** On “perce” maintenant un trou circulaire dans le système. La répartition de température obtenue est présentée en figure 6, pour un trou situé en  $(0.65, 0.65)$  de rayon 0.06. On remarque que, lorsqu’on diminue le paramètre  $\epsilon$ , la répartition *relative* de température reste similaire. En revanche, la température moyenne chute fortement : pour  $\epsilon = 10^{-3}$ , la température maximale est de 0.8. Pour  $\epsilon = 10^{-4}$ , elle n’est plus que de 0.08.

La plaque étant initialement chaude, dépourvue de source de chaleur et en contact avec un thermostat à 0, la température devrait tendre vers 0. Notre observation est cohérente avec ce fait : plus on augmente  $\epsilon$ , plus la température finale est faible. Cependant, le calcul ne pouvant pas être exécuté pendant un temps infini, nous n’atteignons jamais la solution parfaite.

**Variations.** On a maintenant placé deux pistons, chacun muni de deux guides soupape (un d’admission et un d’échappement). Chacun de ces éléments est représenté par un thermostat. Le piston est considéré à une température uniforme de 0.5, le guide d’échappement à 1.0 et le guide d’admission à 0.0. Le résultat obtenu est présenté en figure 7.