# Physique Numérique – TP1
# Equation Logistique

Victor Lanvin

## 1 Introduction

Dans ce TP, on s'intéresse à l'équation logistique, servant notamment à modéliser des problèmes simples d'évolution de populations :

$$x_{p+1} = r(1 - x_p)x_p$$

Cette équation, d'apparence simpliste, peut produire des comportements extrêmement variés et complexes suivant les paramètres initiaux $r$ et $x_0$.

Dans la partie 1, on réalise une étude globale de l'équation pour des valeurs de $r$ bien choisies et pour des valeurs de $x_0$ fixées.

Dans la partie 2, on réalise une étude plus précise du comportement chaotique de l'équation, en étudiant sa sensibilité aux conditions initiales.

Enfin, dans la partie 3, on s'intéresse à la dimension fractale de l'équation.

## 2 Partie 1

**1.a. et 1.b.** Le programme source pour cette partie ainsi que les courbes correspondant aux valeurs du paramètre initial $r = 2$, 2.5, 3, 3.5 et 3.8 sont fournies avec ce compte-rendu.

On remarque que la courbe correspondant à $r = 2$ (Courbe 1) est cohérente avec l'attente d'une convergence uniforme vers 0.5 pour cette valeur du paramètre.

En $r = 2.5$ (Courbe 2), la convergence n'est plus uniforme mais alternée. Elle reste cependant rapide.

Pour $r = 3$ (Courbe 3), il n'est plus évident (d'après la courbe) que la suite converge. On peut cependant essayer de vérifier, expérimentalement, que 2/3 est bien un point fixe de la suite logistique pour $r = 3$. Ainsi, si on prend pour valeur initiale $x = 2/3$ et qu'on affiche plus de points, on obtient la courbe 4. A première vue, il semble que cette courbe mette en évidence un cycle limite à deux valeurs, contrairement aux prévisions analytiques. En réalité, ces oscillations sont dues au fait qu'il est impossible de représenter le point fixe (2/3) de manière précise sur 32 bits (la taille allouée à la représentation des réels par défaut). Ainsi, le point fixe est en réalité légèrement approché, ce qui provoque le comportement oscillatoire. On peut tout de même noter que le point fixe est stable : dans le cas contraire, la faible erreur d'arrondi serait amplifiée et la courbe n'oscillerait plus autour du point fixe.

Pour $r = 3.5$ (Courbe 5), on obtient un cycle limite à 4 valeurs, ce qui est encore une fois compatible avec les prévisions analytiques.

En $r = 3.8$ (Courbe 6), on ne distingue plus de période sur la courbe. On a ainsi atteint, pour cette valeur de $r$, un régime chaotique.

**1.c** Sur l'animation, on remarque d'abord la transition progressive entre la convergence uniforme et la convergence alternée aux alentours de $r = 2$. La convergence est ensuite de plus en plus lente, jusqu'à ce que la suite adopte un comportement périodique, avec des cycles limites. Aux alentours de $r = 3$, le point attractif devient instable et se divise en deux, créant ainsi à cycle limite à deux valeurs. Aux alentours de $r = 3.3$, les deux points attractifs deviennent chacun instables, créant un cycle limite à quatre valeurs. Ce cycle se poursuit jusqu'à ce que la suite adopte un comportement chaotique après $r = 3.6$ environ. Cependant, pour certaines valeurs de $r$ supérieures à 3.6, on remarque des *fenêtres d'ordre*, i.e. des régions où la suite semble de nouveau adopter un comportement périodique. Un exemple d'une telle région est donnée sur la courbe 7, pour $r = 3.74$.

**1.d** Dans cette partie, on trace le diagramme de bifurcation de l'équation logistique (voir courbe 8). La courbe résume tous les phénomènes remarqués précédemment : le premier (unique) point fixe se divise en deux aux alentours de $r = 3$, puis en quatre en $r = 3.3$ environ, jusqu'à ce que la suite atteigne un comportement chaotique.

On remarque cependant sur la courbe un certain nombre de fenêtres d'ordre (on en distingue une large, et au moins 3 autres plus petites). Ces fenêtres d'ordre contiennent un nombre moindre de points attractifs qui se redivisent, conduisant de nouveau à un phénomène chaotique.

**1.e** On *zoome* maintenant sur la portion de la courbe située en $r = 3.74$, ce qui correspond à la plus grande fenêtre d'ordre visible sur la courbe 8. La courbe obtenue est présentée en courbe 9.

On note que, dans cette fenêtre d'ordre, la suite comporte initialement 5 points fixes. Ces points fixes se divisent alors successivement jusqu'à ce que la suite adopte de nouveau un comportement chaotique.

# 3 Partie 2

**2.a** On se place ici à $r = 3.9$, ce qui correspond à un régime fortement chaotique (en dehors d'une fenêtre d'ordre), puis on trace les courbes correspondant aux suites de valeurs initiales $x_0 = 0.1$ et $x_0 = 0.099999$, le tracé est donné en courbe 10.

On remarque tout d'abord que, jusqu'en $p = 20$ environ, les deux tracés sont pratiquement indistingables. En revanche, après $p = 20$, les deux tracés divergent et n'ont plus rien en commun.

**2.b et 2.c** On trace maintenant l'erreur entre les deux courbes précédentes (voir courbe 11). On remarque que l'erreur est rapidement croissante et culmine à $p = 30$ environ, pour atteindre pratiquement 1. L'erreur ne pouvant dépasser 1, les oscillations en $p > 30$ n'ont aucune signification analytique et sont simplement un résultat des oscillations apparemment décorrélées des deux suites.

On peut ensuite approcher la courbe d'erreur par une exponentielle de la forme $ae^{lx}$. La courbe étant tracée en échelle semi-logarithmique, $a$ correspond à l'ordonnée à l'origine et $l$ à la pente de la droite. On trouve alors comme approximation convenable $10^{-8}e^{x/1.5}$. Le tracé global est présenté en courbe 11.

Note : si on trace la courbe pour des valeurs de $r$ inférieures à 3.9, ou pour des valeurs initiales de $x$ moins proches, la courbe diverge plus lentement.

**2.d** Il est clair que, si on se place dans des conditions fortement chaotiques (comme $r = 3.9$), le comportement d'un système est particulièrement difficile à prédire sur le long terme, et ce même si les conditions initiales ne sont que très légèrement variables.

Ici, un décalage de $10^{-6}$ sur la valeur initiale suffit à changer complètement le comportement du système après 30 itérations.

Pour prédire un tel système, il faut soit être capable de fixer les conditions initiales de manière *extrêmement* précise, soit ne faire des prédictions qu'à court terme.

# 4 Partie 3

On s'apperçoit ici que, pour $r = 3.6$, la courbe décroit fortement dans un premier temps puis se stabilise, pour enfin tendre vers 0. Ceci est du au fait que l'on ne manipule qu'un nombre fini de points. Ainsi, $n_l$ est toujours fini et le rapport $\frac{ln(n_l)}{ln(1/l)}$ tend systématiquement vers 0. Une définition raisonnable de la dimension fractale pourrait être prise au plateau de la fonction.

Cependant, dans d'autres cas, comme $r = 3.8$, le plateau semble absent. Définir une dimension fractale à partir de la courbe dans ce type de cas devient bien plus difficile.

Enfin, on remarque que les erreurs d'arrondi provoquent des résultats innatendus dans des cas non chaotiques comme $r = 3$. Dans ce cas, l'arrondi provoque la présence de deux points attractifs qui causent eux-mêmes une dégénerécence de la courbe.

Pour $r = 2$, la courbe reste constante égale à 0, ce qui est cohérent avec les attentes.